РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ — МСХА ИМЕНИ К. А. ТИМИРЯЗЕВА

КАФЕДРА ФИЛОСОФИИ

Кортунов Вадим Вадимович

12 УРОКОВ
ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ

учебно-методическое пособие

Москва, 2022
Издательство «Перо»

УДК 16
ББК 87.4я73
К69

Кортунов Вадим Вадимович

К69 **12 уроков формальной логики. Учебно-методическое пособие.** – М.: Издательство «Перо», 2022. – 179 с.

ISBN 978-5-00204-574-7

Настоящее учебное пособие было написано для студентов после многолетнего преподавания дисциплины «Логика» в различных вузах России и Европы. Данное пособие не претендует на целостное раскрытие предмета. Его цель – помочь студентам различных направлений подготовки понять смысл изучаемой дисциплины, а также выработать практические навыки решения логических задач и упражнений. Основное внимание уделено получению нового знания из имеющегося и проверке этого знания на истинность и ложность. В предлагаемом учебнике студент может найти разъяснения различных вариантов логических исчислений (табличных, натуральных, аксиоматических, семантических, аналитических, секвенциальных), а также заглянуть в перспективу развития логической науки. Учебник написан простым и доступным языком и рекомендуется для студентов гуманитарных направлений подготовки.

Рецензенты:
– доктор философских наук, профессор кафедры философии Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ) Шиповская Людмила Павловна,
- доктор философских наук, профессор Национального исследовательского университета «МЭИ» в г. Волжском Шелекета Владислав Олегович

УДК 16
ББК 87.4я74

ISBN 978-5-00204-574-7

Оглавление

Введение. Зачем нужна логика?

Известно, что логика – наука о мышлении. Соответственно, формальная логика – наука о формах нашего мышления. Из данного определения не совсем ясно, чем логика занимается и для чего она нужна.

У логики есть две очень важные функции. Во-первых, она дает возможность получения нового знания из уже имеющегося. При этом она делает это на основе ряда алгоритмов. Во-вторых, логика проверяет это знание на истинность и ложность.

Для нашей жизни значение логии сложно переоценить. Во-первых, знание логики дает возможность человеку избегать неправильных выводов и, как следствие, грамотно ставить перед собой задачи и находить оптимальное их решение. Во-вторых, логика является базисом любой науки. Чем лучше учёный владеет логическими навыками, тем эффективнее его научная деятельность. В-третьих, логика на сегодняшний день является единственным универсальным языком для общения с машинами. Любой гаджет, любой электронный прибор и любая программа – это итог логического взаимоотношения между человеком и искусственным интеллектом. Наконец, в-четвертых, хорошее знание логики помогает студенту благополучно сдать экзамен по этому непростому, но крайне захватывающему предмету.

Задача настоящего издания – объяснить студенту максимально простым языком сложные логические процедуры. Вначале мы даже хотели назвать это учебное пособие «Логика для чайников». Но вспомнив, что даже сегодняшние корифеи логической науки когда-то были в ней «чайником», решили не обижать, ни студентов, ни высокочтимую профессуру.

Глава I. Алфавит классической формальной логики

Для того, чтобы начать ориентироваться в формальной символической классической логике необходимо знать терминологию и знаки, с которыми нам придется иметь дело. Что касается терминологии, её мы будем раскрывать по мере необходимости. Что же касается знаков, их мы должны запомнить в первую очередь.

Символ	название	пример написания	аналог в естественном языке
⊃	материальная импликация	a⊃b	вода закипает при 100 градусах (b), если идет дождь (a). Импликация фиксирует событие «b» при условии события «a». При этом событие «a» не обязательно является необходимым для события «b».
⊨	логическое следование	a⊨b $\frac{a}{b}$	из a следует b. В отличие от импликации, знак логического следования подразумевает, что «a» и «b» связаны содержательно и событие «a» увеличивает вероятность события «b».
→ ↔	правомерный переход	a→b	имея «a», мы переходим к «b».

←			Знак «→» в формальной логике относится к «плавающим», не вполне определенным знакам. Иногда он может означать материальную импликацию «⊃», иногда логическое следование « ⊨».
∧	конъюнкция	a∧b	идет дождь и гремит гром
∨	дизъюнкция	a∨b	идет дождь или гремит гром. Простая (нестрогая) дизъюнкция предполагает, что два события могут происходить одновременно, а могут и не происходить.
⊻	строгая дизъюнкция	a⊻b	либо идет дождь, либо гремит гром. В отличие от простой (нестрогой) дизъюнкции, строгая дизъюнкция исключает возможность, что оба события происходят одновременно.
≡	тождество, эквивалентность	a≡b	«a» и «b» взаимовыразимы. «a≡b» означает,

			что из «a» следует «b», а из «b» следует «a». Часто этот символ обозначается знаком «↔». Поэтому эквивалентность в логике называют «двойной импликацией».
¬	отрицание, инверсия	¬a	«a» – добрый; «¬a» - недобрый, злой.
a, b, c…	переменные, пропозициональные переменные, индивидные (предметные) переменные, константы, термы	a	a – студент a – Иванов – отличник, но плохой спортсмен a – студент данной группы a – студент Иванов a – всё вышеперечисленное
P, S, Q…	предикаты, предикаторы	P(x) P(x, y)	Иван – отличник Иван и Пётр – братья
f	предметные функторы	*f*(a, b)	2+2=4
∀	квантор общности	∀x	Все люди; ни один человек; никто из людей; не существует человека…
∃	квантор существования	∃x	Существует, по крайней мере, один человек; некоторые люди; кое-кто из людей; есть человек; большинство людей…

Дополнительная информация

Замечание первое.

Символическая логика формировалась в различных частях мира в XIX-XX веках. При этом её становление происходило автономно в различных частях света с применением многообразных символических обозначений. Поэтому единой системы обозначения символов в логике на сегодняшний момент *не существует*.

Так, в современной литературе можно встретить написание импликации как «→»; конъюнкции как «&», «•» или вовсе без знака «ab»; строгой дизъюнкции как «⊕», «||»; эквивалентности как «↔», «⇔», «⊣ ⊢», «~»; отрицания как «~a», «ā» и т.д.

В современной литературе любая книга (монография, учебник, статья), как привило, начинается с описания языка логики. Если это опускается, это означает, что читателю предлагается понять язык интуитивно, из контекста написанного текста.

Замечание второе.

Язык символической логики может быть расширен за счет известных математических (и иных) символов. Современный язык логики изобилует символами из области информатики, математики, физики, теории множеств и даже квантовой механики. Более того, всегда возможно расширение языка логики за счет её *авторской* интерпретации.

Предлагаем студенту принять участие в этом творческом процессе.

Замечание третье.

При дальнейшем изложении текста нам придется время от времени предлагать читателю альтернативные варианты написания логических формул. Они будут представлены либо в скобках, либо со специальными оговорками.

Глава II. Логические законы, связки и операторы

Классическая логика оценивает любое суждение естественного языка как *истинное* или *ложное*. Соответственно, любое логическое высказывание, выражающее суждение, также может быть оценено как истинное или ложное.

Основные законы логики отражают именно эту однозначность:

1. Закон тождества гласит: ***Любое понятие или суждение всегда употребляется в одном и том же смысле.*** Данный закон необходим, чтобы понятия, которыми мы оперируем в процессе рассуждения, не меняли своего смысла во избежание подмены понятий. Символически этот закон выражается так:

$$\mathbf{A \equiv A}$$

2. Закон непротиворечия: ***Одно и то же суждение не может быть одновременно истинным и ложным.*** (Или в другой формулировке: *Два противоречивых суждения не могут быть одновременно истинными или ложными)*:

$$\mathbf{\neg(A \wedge \neg A)}$$

3. Закон исключенного третьего: ***Любое суждение, либо истинно, либо ложно. Третьего не дано****:*

$$\mathbf{A \vee \neg A}$$

Дополнительная информация

Иногда, в качестве четвёртого основополагающего закона логики добавляют закон *достаточного основания*. Он гласит: *Суждение считается истинным, если для этого есть достаточные основания (т.е., если оно доказано)*. Данный закон никак не формализуется. Да и его статус в качестве основного логического закона – спорен.

Для того, чтобы ту или иную формулу (суждение, высказывание) оценить на истинность или ложность, вначале необходимо понять, какие значения имеют элементарные сложные высказывания, такие как $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \underline{\vee} B$, $A \supset B$, $A \equiv B$, $\neg A$.

Дополнительная информация

Высказывание называется простым, если оно содержит один субъект (S) и один предикат (P). Соответственно, сложными называются высказывания, содержащие в своем составе два и более простых высказывания. Здесь уместна аналогия с предложениями в естественном языке. Предложения, имеющее одно подлежащее и одно сказуемое называются простыми; сложными предложениями называются те, которые имеют в своем составе более одного простого предложения.

Например, предложение «Идет дождь» называется в естественном языке простым. В логике подобное высказывание также называется простым.

А предложение «Идет дождь, и светит солнце» - сложное. С точки зрения классической логике такое высказывание также сложное.

Конъюнкция.

Конъюнктивные высказывания – это сложные соединительные высказывания, основным термином которого является знак «$\wedge$». В русском языке связка «$\wedge$» чаще всего соответствует предлогу «и». Например, «Идет дождь, и светит солнце». Понятно, что конъюнктивные высказывания могут выражаться и через другие слова – «но», «а», «однако», «затем». Например «Идет дождь, но светит солнце», «Идет дождь, однако светит солнце», «Идет дождь, а солнце светит». Даже высказывание «Дождь прошёл, а затем выглянуло солнце» - также является конъюнктивным.

Дополнительная информация

Иногда возникает необходимость с помощью конъюнктивных высказываний подчеркнуть последовательность событий. Например, «Прошел дождь, а затем выглянуло солнце, и позже засияла радуга». Для этого используют индексы последовательности. В нашем случае мы имеет три последовательных события – A, B и C. В формальной логике это можно отразить следующим образом: $\wedge^{\rightarrow 3}(A, B, C)$ или $A\wedge^{\rightarrow 3}B\wedge^{\rightarrow 3}C$

Поскольку сложные конъюнктивные высказывания повествуют о двух и более событиях, их истинность в целом определяется истинностью всех входящих в них простых высказываний. Иными словами, чтобы высказывание «Идет дождь, и светит солнце» можно было назвать истинным, необходимо, чтобы истинными были оба этих события - «Идет дождь» и «Светит солнце». В таблице истинности свойства конъюнкции отражаются так:

A	**∧**	**B**
И	И	И
И	Л	Л
Л	Л	И
Л	Л	Л

В смысловом содержании:

A	**∧**	**B**
Идет дождь	И	Светит солнце
Идет дождь	Л	Не светит солнце
Не идет дождь	Л	Светит солнце
Не идет дождь	Л	Не светит солнце

Для начинающих читателей объясним, что именно означает данная таблица. Буква «И» означает «истина», буква «Л» - ложь. Сначала мы перевели высказывание естественного языка «Идет дождь, и светит солнце» в символическую форму. Для этого мы обозначили простое суждение «Идет дождь» латинской буквой «А», а суждение «Светит солнце» - латинской буквой «В». Затем мы соединили оба этих высказывания знаком конъюнкции и получили «А∧В». Следующим шагом мы прописали все возможные комбинации сочетания этих переменных:

А	**∧**	**В**
И		И
И		Л
Л		И
Л		Л

И, наконец, поскольку конъюнкция получает значение истины только, когда истинны оба ее члена одновременно, в первой строке мы ставим значение «И», а во всех остальных – «Л».

Если бы в нашей конъюнкции было бы не два члена, а три - А∧В∧С – строчек в нашей таблице было бы вдвое больше:

А	**∧**	**В**	**∧**	**С**
И	И	И	И	И
И	И	И	Л	Л
И	Л	Л	Л	И
И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	И	Л	И
Л	Л	И	Л	Л
Л	Л	Л	Л	И
Л	Л	Л	Л	Л

Число строк в таблице подсчитывается по формуле 2^n, где n - количество переменных в формуле.

Здесь, для обозначения истинности и ложности высказываний, мы использовали (и будем использовать в дальнейшем) русские буквы «И» и «Л». Однако часто в литературе можно встретить и иные обозначения – символы на английском языке или числовые обозначения:

A	∧	B
И	И	И
И	Л	Л
Л	Л	И
Л	Л	Л

↔

A	∧	B
T	T	T
T	F	F
F	F	T
F	F	F

↔

A	∧	B
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	0	0

Дизъюнкция.

Дизъюнктивные высказывания – это сложные разделительные высказывания, основным термином которого является знак «∨». В русском языке связка «∨» чаще всего соответствует предлогу «или», «либо». Причем дизъюнкция верна, когда верно одно из утверждений или оба одновременно.

Примером дизъюнктивного высказывания может быть суждение «Идёт дождь, или идёт снег». Сразу обращаем внимание читателя, что простая (нестрогая) дизъюнкция ложна лишь в одном случае – когда ложны оба её члена (оба простых высказывания, входящих в ее состав). Выражение «Идёт дождь, или идёт снег» истинно, если истинно, либо то, что «Идёт дождь», либо то, что «Идёт снег». Но нестрогая дизъюнкция верна и тогда, когда верно и то, и другое:

A	∨	B
И	И	И
И	И	Л
Л	И	И
Л	Л	Л

Строгая дизъюнкция.

Строгая дизъюнкция обозначается знаком «$\underline{\vee}$» и отличается от нестрогой тем, что принимает значение лжи при истинности обоих её членов (обоих высказываний, входящих в её состав):

A	$\underline{\vee}$	B
И	Л	И
И	И	Л
Л	И	И
Л	Л	Л

В русском языке строгая дизъюнкция выражается оборотом «или…, или…», «либо…, либо», «или одно, или другое». Если верными оказываются оба события, строгая дизъюнкция считается ложной, поскольку одно событие исключает другое. Примером строгой дизъюнкции может служить суждение «Либо снег идёт, либо не идёт».

В нестрогой дизъюнкции два события могут наступить одновременно. Например, в суждении «Идёт дождь, или идёт снег» очевидно, что возможен снег с дождём. В строгой дизъюнкции одно событие исключает другое, как в примере «Либо снег идёт, либо не идёт».

Эквивалентность.

Основным знаком эквивалентности (эквиваленции, тождества, равнозначности, взаимовыразимости) является «$\equiv$» или «$\leftrightarrow$». Иногда тождество в логике называют «двойной импликацией», поскольку эквивалентность «$A\leftrightarrow B$» истинна, когда верно, что из A следует B, а из B следует A: $(A\leftrightarrow B)\equiv(A\supset B, B\supset A)$.

В русском языке формула «$A\leftrightarrow B$» передаётся выражениями «A эквивалентно B», «Если и только, если A, то B», «B тогда и только тогда, когда A». В этом смысле в формуле «$A\leftrightarrow B$» A является необходимым и достаточным основанием для B. Как, впрочем, и B является необходимым и достаточным основанием для A.

Дополнительная информация

Необходимым условием (основанием) события A называется такое условие, без которого события A невозможно.

Достаточным условием (основанием) события A называется такое условие, при выполнении которого наступает событие A.

Необходимым и достаточным условием (основанием) события A называется такое условие, при выполнении которого наступает событие A, а при его невыполнении событие A невозможно.

Теперь постараемся перевести всё это на понятный язык.

Есть такая поговорка: «Не разбив яйцо, яичницу не пожаришь». О чём идёт речь? Чтобы пожарить яичницу *необходимо* разбить яйцо. Иными словами условие «разбить яйцо» является необходимым для события «яичница». Но является ли условие «разбить яйцо» *достаточным*, для того, чтобы у нас получилась яичница? Очевидно, нет. Ведь разбитое яйцо ещё надо положить на сковородку и пожарить. Таким образом, условие «разбить яйцо» является *необходимым, но недостаточным* основанием для вкусной яичницы.

Народная поговорка говорит: «Аппетит приходит во время еды». Не вдаваясь в дискуссию, примем это высказывание на веру, как истинное. Народная мудрость говорит нам о том, что возбуждение аппетита имеет своим условием хорошую трапезу. То есть, хорошая трапеза – *достаточное* условие для появления у нас аппетита. Но в тоже время мы с вами понимаем, что условием появления аппетита может служить не только трапеза, но и активная физическая нагрузка, или, скажем, длительное воздержание от пищи. Значит, приём пищи является вполне *достаточным, но не необходимым* основанием для возбуждения аппетита.

Но хватит поговорок. Перейдем к обыденному опыту. Всем известно, что для того, чтобы в чайнике закипела вода, её надо нагреть до ста градусов. То есть, условием кипения воды является её нагрев до ста градусов. Теперь постараемся понять, что представляет собой условие «нагрев до ста градусов». Это условие *необходимо*, поскольку без нагрева до ста градусов вода просто не закипит. Это условие *достаточно*, поскольку нагревание воды до ста градусов обязательно приведет к её кипению. Когда условие является *необходимым и достаточным* для результата, условие и результат *эквивалентны*. Это можно сформулировать следующим образом: нагревание воды до ста градусов эквивалентно её кипению – кипение воды эквивалентно нагреванию её до ста градусов.

(Вода нагрета до ста градусов) → (вода кипит)

(Вода кипит) → (вода нагрета до ста градусов)

(Вода кипит) ↔ (вода нагрета до ста градусов)

Отношение эквивалентности выражается следующей таблицей истинности:

A	↔	**B**
И	И	И
И	Л	Л
Л	Л	И
Л	И	Л

Дополнительная информация

Для понимания смысла эквивалентности/тождества можно было бы ограничиться замечанием, что этот термин близок по содержанию знаку равенства в математике. Или сказать, что эквивалентность выражается словосочетанием «одно и то же». Однако это не совсем так. Более того, в логической науке понятия «эквивалентность» и «тождество» принято различать.

Тождество (равнозначность) – это отношение между одним и тем же объектом. Или, другими словами, это отношение между выражениями, имеющими одинаковое значение и объём. Например, в отношении тождества относятся такие понятия как «Самый большой город России» и «Столица России». Ясно, что речь идёт об одном и том же объекте, имеющим одно и то же значение – «Москва». Однако содержание этих высказываний, как мы видим, разное.

Тождественными также являются выражения «2х2» и «4», поскольку они имеют один и тот же объем. Но, опять-таки, содержание и свойства этих выражений разные: в первом случае речь идёт о свойстве произведения, а во втором – о свойстве числа.

Эквивалентность (взаимовыразимость), напротив, есть отношение между разными объектами, имеющими одинаковые (или близкие по содержанию) свойства. В качестве примера можно привести оригинальное лекарство и его дженерик. Это разные препараты (объекты), имеющие одинаковые (эквивалентные) свойства. В определенном смысле, можно назвать эквивалентными кассира и банкомат, при условии, что оба они выполняют одинаковые функции.

Отрицание.

Знак отрицания (инверсии) меняет формулу и всё, что она выражает (суждение, высказывание, умозаключение и т.д.) на противоречивую её. Особо подчеркнём – именно на *противоречивую*, а не на *противоположную* (о разнице понятий «противоречие» и «противоположность» будет подробнее рассказано ниже). Инверсия обозначается знаком «¬». Этот знак превращает ложь в истину, а истину в ложь. В русском языке логическое отрицание обычно обозначается словами «неверно, что…». Смысл инверсии выражается следующей таблицей истинности:

А	**¬А**
И	Л
Л	И

Если мы хотим отрицать формулу А, то ставим перед ней знак «¬» и получаем «¬А». Читаем: «Не А» или «Не верно, что А». Если у нас имеется достаточно длинная формула, то берём всю её в скобки и перед ней ставим отрицание «¬».

Импликация.

Импликативные высказывания – это сложные условные высказывания, основным термином которого является знак «⊃». В русском языке связка «⊃» чаще всего соответствует словосочетанию «если…, то…». Именно это словосочетание (а, точнее, его неоднозначность и вариативность) порождает множество недоразумений.

Слова А.П. Чехова «Если на стене висит ружьё, то оно обязательно должно выстрелить» воспринимается как логическое следование, где из условия «висит ружьё» логически следует «должно выстрелить». На самом же деле никакого логического следования здесь нет и в помине. Здесь есть событие В и условие А. Причем условие А является не обязательно необходимым для события В.

Дополнительная информация

Импликация - самый спорный логический знак в формальной классической логике. Настолько спорный, что он породил множество неклассических логик и множество интерпретаций самой импликации. Чтобы отделить классическую импликацию от множества её интерпретаций («релевантная импликация», «строгая импликация», «интенсиональная импликация» и т. д.), её принято назвать «материальной импликацией».

Важно

В формуле «$A \supset B$» условие A принято называть *антецедентом*.

В формуле «$A \supset B$» следствие B принято называть *консеквентом*.

Итак, высказывание импликации вида $A \supset B$ – это высказывание, в котором событие B происходим при условии события A. При этом событие A не обязательно является *необходимым* условием для осуществления события B.

В силу сказанного, истинными импликативными суждениями можно считать следующие:

1. «Если чайник поставить на плиту, то вода в нём закипит при ста градусах по Цельсию»

2. «Если чайник не ставить на плиту, то вода в нём всё равно закипит при ста градусах по Цельсию»

3. «Если Москва – столица России, то вода в чайнике всё равно закипит при ста градусах по Цельсию»

4. «Если Москва – столица Франции, то вода в чайнике всё равно закипит при ста градусах по Цельсию»

5. «Если Москва – столица Франции, то вода в чайнике никогда не закипит при ста градусах по Цельсию»

При всей *кажущейся* абсурдности представленных выражений, все они – истинны.

А теперь давайте разберемся, по пунктам.

Первые четыре выражения говорят нам о том, что «вода в чайнике закипит при ста градусах по Цельсию» при *любых* условиях. Иными словами, ни одно из условий не помешает воде закипеть при ста градусах по Цельсию. Мы можем определить разные условия – истинные, ложные, достаточные или необходимые, но при этом «вода при ста градусах» всё равно закипит. Именно поэтому импликация здесь истинна.

Зададимся вопросом: «Закипит ли вода при ста градусах по Цельсию, если предположить, что Луна сделана из зелёного сыра»? Очевидно, что закипит. Именно поэтому импликация истинна всегда, когда истинен консеквент (следствие).

Пятый пример проще для понимания: «Если Москва – столица Франции, то вода в чайнике никогда не закипит при ста градусах по Цельсию». Почему эта импликация также является истинной? Просто потому, что из одной нелепицы мы вывели другую нелепицу. А, если из одной лжи мы получаем другую, следовательно, наши рассуждения правильны.

Если наши рассуждения показались читателю неубедительными, приведём пример из математики. «Если 5:0=0, то 0х0=5». Здесь оба утверждения ложны, но вывод сделан по всем правилам математики. Следовательно, и это умозаключение – истинно.

Если и этот пример показался читателю неубедительным, приведём ситуацию, называемую в научной литературе «Тест на послушание», в которой мать даёт наставление своему сыну:

Мама говорит сыну: «Делай уроки!» (принимаем это высказывание за «+»).

Мама ничего не говорит сыну (принимаем это высказывание за «-»).

Сын делает уроки (принимаем это высказывание за «+»).

Сын бездельничает (принимаем это высказывание за «-»).

Строим таблицу истинности:

	Условие	⊃	**Результат**
1	Мама говорит сыну: «Делай уроки!»	+	Сын делает уроки
2	Мама говорит сыну: «Делай уроки!»	-	Сын бездельничает
3	Мама ничего не говорит сыну	+	Сын делает уроки
4	Мама ничего не говорит сыну	+	Сын бездельничает

Ясно, что сын не слушается мать только в случае №2.

Отношение импликации выражается следующей таблицей истинности:

A	⊃	B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	И	Л

Дополнительная информация

Для полноты картины добавим, что в логике описаны и иные виды логических терминов, определяющих структуру сложных высказываний. Среди них стрелка Пирса и штрих Шеффера.

Стрелка Пирса обозначается в виде символа «↓», эквивалентна операции «или-не» и задаётся следующей таблицей истинности:

A	↓	B
И	Л	И
И	Л	Л
Л	Л	И
Л	И	Л

Штрих Шеффера обозначается в виде символа «|», эквивалентен операции «и-не» и задаётся следующей таблицей истинности:

A	|	B
И	Л	И
И	И	Л
Л	И	И
Л	И	Л

Однако эти логические термины редко используются в формальной логике. Они легко выражаются через описанные выше термины («∧», «∨», «⊻», «⊃», «≡», «¬»), и в дальнейшем мы их постараемся избегать.

Квантор общности ∀.

Оператор «∀» называется квантором общности (от английского «All») и переводится на русский язык выражениями «Все…», «Ни один…», «Никто из…», «Не существует…» и т.д.

Оператор «∀» ставится непосредственно перед переменной - $\forall x$, что означает «Все *x*…», «Для всех *x*…», «Ни один из *x*…», «Не существует *x*…».

Если нам необходимо перевести на формальный язык выражение «Все люди – млекопитающие», мы обозначаем свойство (предикат) «млекопитающее» заглавной латинской буквой, например, «Q», человека - переменной (обозначаем прописной латинской буквой), например, «x».

Таким образом, выражение «Человек есть млекопитающее» символически может выглядеть так: «Q(x)». Читаем: есть «x», обладающий свойством «Q» - человек обладает свойством млекопитающего.

Далее, мы прибавляем квантор «∀», чтобы подчеркнуть, что *все* люди – млекопитающие.

Пишем: ∀xQ(x).

Читаем: Для всех «x» верно, что «x» обладает свойством «Q».

По-русски: Для всех людей верно, что они обладают свойством «млекопитающих». Или, проще, «Все люди – млекопитающие».

Если в формуле боле одной переменной, то квантор ставится перед каждой из них. Выражение «Все мужчины и все женщины – люди» можно символически выразить, как ∀x∀yQ(x, y). Читаем: «Для всех «x» и для всех «y» верно, что они обладают свойством «Q».

Квантор существования ∃.

Оператор «∃» называется квантором общности (от английского «Existence») и переводится на русский язык выражениями «Некоторые…», «Большинство…», «Не все из…», «Существует…» и т.д.

Оператор «∃» ставится непосредственно перед переменной - $\exists x$, что означает «Некоторые *x*…», «Большинство *x*…», «Не все *x*…», «Существует *x*…».

Если нам необходимо перевести на формальный язык выражение «Некоторые люди – философы», мы обозначаем свойство (предикат) «философы» заглавной латинской буквой, например, «Q», человека - переменной (обозначаем прописной латинской буквой), например, «x».

Таким образом, выражение «Люди - философы» символически может выглядеть так: «Q(x)». Читаем: есть «x», обладающий свойством «Q» - человек обладает свойством философа.

Далее, мы прибавляем квантор «∃», чтобы подчеркнуть, что *лишь некоторые* люди – философы.

Пишем: ∃xQ(x).

Читаем: Для некоторых «x» верно, что «x» обладает свойством «Q».

По-русски: Для некоторых людей верно, что они обладают свойством «философы». Или, проще, «Некоторые люди – философы».

Если в формуле боле одной переменной, то квантор ставится перед каждой из них. Выражение «Некоторые мужчины и некоторые женщины – философы» можно символически выразить, как ∃x∃yQ(x, y). Читаем: «Для некоторых «x» и для некоторых «y» верно, что они обладают свойством «Q».

Пример построения элементарной формулы.

Зная основные символы формальной логики, мы можем перевести любую естественную речь на формализованный язык. К примеру:

«Если кто-то любит кого-то, и никто не любит всех, значит, некто любит всех или все не любят кое-кого».

Мы специально взяли этот классический пример, в котором нет никакого внятного содержания, чтобы подчеркнуть формальность логики. Задача проста: надо выразить эту абракадабру логическими символами.

Итак, мы понимаем что, кто-то (x) с кем-то (y) находятся (или не находятся — «¬») в отношении любви (L). Иными словами L(x, y). Имеем:

L(x, y) –«x» любит «y»;

¬L(x, y) —«x»не любит «y»(не верно, что икс любит игрека).

Дополнительная информация

Если бы мы имели формулировку «*x* и *y* любят друг друга», то использовали не предикат L, а функтор *f*— *f*(x,y). При использовании функторов, последовательность переменных не важна — *f*(x,y), либо *f*(y,x) поскольку функтор «*f*» говорит о взаимном отношении между иксом и игреком. Однако предикат L действует лишь в одну сторону, и именно поэтому здесь важна последовательность переменных. L(x, y) – читается, как «*x* любит *y*», а L(y,x) – читается, как «*y* любит *x*».

Осталось разобраться с кванторами, то есть, где кто-то любит (∃), а где любят все (∀). Итак,

∀x — все x;

∃x — некоторые x.

Пробуем «перевести» на язык логики фразу «кто-то любит кого-то». Некоторый *x* находится с некоторым *y* в состоянии любви L:

$\exists x \exists y L(x, y)$.

Соответственно, фраза «никто не любит всех» должна символически выглядеть так:

$\forall x \forall y \neg L(x, y)$ – для всех «x» и для всех «y» верно, что они не находятся в состоянии любви «¬L».

Если понятны первые два действия, ничего не стоит сделать «перевод на язык логики» фразы «некто любит всех» и все не любят кое-кого»:

$\exists x \forall y L(x, y)$ и $\forall x \exists y \neg L(x, y)$

Теперь осталось только объединить все наши фразы операторами «∧» — «и», «∨» — «или», «⊃» — «если…, то»:

$(\exists x \exists y L(x, y) \wedge \forall x \forall y \neg L(x, y)) \supset (\exists x \forall y L(x, y) \vee \forall x \exists y \neg L(x, y))$

Внешние скобки можно опустить, поскольку знак «⊃» сильнее знаков «∧» и «∨». Получаем:

$\exists x \exists y L(x,y) \wedge \forall x \forall y \neg L(x,y) \supset \exists x \forall y L(x,y) \vee \forall x \exists y \neg L(x,y)$

Важно

Для дальнейшей работы необходимо запомнить несколько формул и правил формальной логики.

$p \supset (q \supset p)$ – закон (утверждения) консеквента;
$(p \to q) \supset (\neg q \supset \neg p)$ – закон контрапозиции;
$(\neg p \supset \neg q) \supset (q \supset p)$ – закон усиленной (обратной) контрапозиции;
$((a \wedge b) \supset c) \supset ((a \wedge \neg c) \supset \neg b)$ – закон сложной контрапозиции;
$(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$ – закон самодистрибутивности (материальной) импликации.

Отрицание основных формул:
$\neg(a \wedge b) \leftrightarrow \neg a \vee \neg b$,
$\neg(a \vee b) \leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$,
$\neg(a \veebar b) \leftrightarrow (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$,
$\neg(a \to b) \leftrightarrow a \wedge \neg b$,
$\neg(a \equiv b) \leftrightarrow (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a)$,
$\neg\neg a \leftrightarrow a$

Основные эквивалентности:
Эквивалентности могут помочь решать частные задачи. Кроме того, приведение формул к импликации очень удобно для дальнейшей работы в аксиоматических системах, где импликация является основном оператором. Приведение формул к конъюнкции или дизъюнкции может помочь в целях приведения формул к так называемым *нормальным формулам* — дизъюнктивно нормальным формулам и конъюнктивно нормальным формулам. Преобразование эквивалентных формул также помогает решать логические задачи в системах, где анализ эквивалентных формул не предусмотрен.

приведение операторов к импликации —
$(a \wedge b) \equiv \neg(a \supset \neg b) \wedge \neg(b \supset \neg a)$
$(a \vee b) \equiv (\neg a \supset b) \wedge (\neg b \supset a)$
$(a \equiv b) \equiv (a \supset b) \wedge (b \supset a)$
$(a \underline{\vee} b) \equiv (\neg a \supset b) \wedge (\neg b \supset a)$

приведение операторов к конъюнкции —

$(a \supset b) \equiv \neg(a \wedge \neg b)$

$(a \vee b) \equiv \neg(\neg a \wedge \neg b)$

$(a \veebar b) \equiv \neg((a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b))$

$(a \equiv b) \equiv (a \vee \neg b) \wedge (b \vee \neg a)$

приведение операторов к дизъюнкции —

$(a \wedge b) \equiv \neg(\neg a \vee \neg b)$

$(a \supset b) \equiv (\neg a \vee b)$

$(a \veebar b) \equiv (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$

$(a \equiv b) \equiv (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$

Пусть читатель не пугается этих замысловатых формул. Позже мы объясним их значение. Они не столь сложны, как кажутся!

Глава III. Построение таблиц истинности

Построение таблиц истинности является первой и основополагающей задачей студента, который впервые знакомится с логикой. Таблицы истинности строятся для логики *высказываний*. Эти таблицы автоматизированы в том смысле, что их результат зависит от алгоритмических действий. Читатель может зайти на множество сайтов, где представлены он-лайн калькуляторы для подобных исчислений. Однако мастерство создавать этих таблицы «вручную» способствует развитию логического мышления.

Дополнительная информация

Логика высказываний и логика предикатов считаются двумя разделами классической логики. В некоторых источниках – логика предикатов считается *расширением* логики высказываний (её развитием).

Теперь по порядку.

Логика высказываний анализирует отношения *между* высказываниями.

Логика предикатов анализирует отношения *внутри* одного высказывания.

Суждение «Все люди млекопитающие» в логике высказываний может обозначаться одним символом, например, символом «а». В логике предикатов это выражение будет обозначаться значительно сложнее, учитывая его внутреннюю структуру - $\forall x S(x)$.

В предыдущем разделе мы попытались вывести формулу словесного выражения *«Если кто-то любит кого-то, и никто не любит всех, значит, некто любит всех или все не любят кое-кого».* И получили формулу
$\exists x \exists y L(x,y) \wedge \forall x \forall y \neg L(x,y) \supset \exists x \forall y L(x,y) \vee \forall x \exists y \neg L(x,y)$. Это формула логики предикатов. Если бы мы хотели выразить это суждение в логике высказываний, мы бы получили более емкую запись: $a \wedge b \supset c \vee d$.

Логика высказываний даёт возможность анализировать большие массивы высказываний и отношения между ними.

Ещё одно отличие логики высказываний от логики предикатов заключается в том, что она (логика высказываний) не использует операторы – знаки кванторов – «∃» и «∀».

Важно

Каждый школьник помнит, что в арифметике сначала выполняются умножение и деление, а затем – сложение и вычитание.

В логике также существует соглашение о порядке действий. Сначала конъюнкция «∧, затем дизъюнкция «∨», затем импликация «⊃», и затем эквивалентность «≡». Такое соглашение позволяет избегать лишних скобок (именно поэтому данное соглашение иногда называется «соглашением о скобках»). Если бы мы не приняли такого соглашения, то формулу «a∧b∨c⊃d≡e» нам бы пришлось записывать так: «(((a∧b)∨c)⊃d)≡e».

Начнём с какого-нибудь очень простого примера. Предположим, нам предлагается построить таблицу истинности для формулы

$$a \supset a \vee b$$

Мы видим, что в данной формуле два логических знака - «⊃» и «∨». Какой из них главный, какова последовательность наших действий? Для этого мы должны восстановить скобки. Вспоминаем соглашение о скобках: *сначала конъюнкция «∧, затем дизъюнкция «∨», затем импликация «⊃», и затем эквивалентность «≡»*

Значит формулу «a⊃a∨b» можно представить как «a⊃(a∨b)» (но, ни в коем случае, как «(a⊃a)∨b»!) В целом – это импликация.

Затем приступаем к построению таблицы истинности. Сколько должно быть в не столбцов? Ровно столько, сколько знаков в формуле, считая логические термины. В нашем случае пять знаков:

1	2	3	4	5
a	⊃	a	∨	b

Сколько должно быть строк в таблице? Количество строк вычисляется формулой 2^n, где n – количество переменных в формуле. В данном случае у нас две переменные – «a» и «b». Соответственно $2^2 = 4$. Значит, рисуем четыре строчки:

	1	2	3	4	5
	a	⊃	a	∨	b
1					
2					
3					
4					

Для удобства мы пронумеровали столбцы и строки. Однако в дальнейшем это делать не обязательно.

Следующим шагом мы должны присвоить переменным значение «истина» и «ложь». Причём таким образом, чтобы перебрать все возможные комбинации. Для этого мысленно делим количество строк пополам, и в первой половине пишем значение «истина», а во второй «ложно».

	1	2	3	4	5
	a	⊃	a	∨	b
1	И				
2	И				
3	Л				
4	Л				

Поскольку переменная «a» у нас встречается два раза, то просто переписываем значение «И» и «Л» еще раз:

	1	2	3	4	5
	a	⊃	a	∨	b
1	И		И		
2	И		И		
3	Л		Л		
4	Л		Л		

Как присвоить значение «И» и «Л» второй переменной? У второй переменной чередование «И» и «Л» в строках должна быть вдвое чаще, чем в предыдущей:

	1	2	3	4	5
	a	⊃	a	∨	b
1	И		И		И
2	И		И		Л
3	Л		Л		И
4	Л		Л		Л

Поскольку мы договорились о порядке действий, то сначала мы проверяем на истинность дизъюнкцию «∨», а только затем импликацию «⊃». Делаем это по таблицам истинности для логических знаков, которые были подробно описаны в предыдущем разделе. Приведём еще раз эти таблицы, для удобства объединив их воедино:

переменные		результат их сравнения			
A	B	∧	∨	⊃	≡
И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	Л	И	И	Л
Л	Л	Л	Л	И	И

Итак, для начала мы сравниваем значения дизъюнкцию «∨». То есть, сравниваем столбцы 3 и 5 и вписываем результат в столбец 4:

	1	2	3	4	5
	a	⊃	a	∨	b
1	И		И	И	И
2	И		И	И	Л
3	Л		Л	И	И
4	Л		Л	Л	Л

Завершающим шагом должно быть выписывание значение импликации «⊃» во втором столбце. Для этого сравниваем значения первого столбца с результатом дизъюнкции (со значениями четвёртого столбца):

	1	2	3	4	5
	a	⊃	a	∨	b
1	И	**И**	И	И	И
2	И	**И**	И	И	Л
3	Л	**И**	Л	И	И
4	Л	**И**	Л	Л	Л

Из проведённого исчисления делаем вывод: формула «a⊃a∨b» принимает значение «истина» при любых значениях, входящих в неё переменных. Такая формула называется *тождественно-истинной*.

Важно

Если формула принимает значение «истина» при любых значениях, входящих в неё переменных, она называется *тождественно-истинной (или законом логики)*.

Если формула принимает значение «ложь» при любых значениях, входящих в неё переменных, она называется *тождественно-ложной*.

Если формула принимает значение как «ложь», так и «истина», она называется *выполнимой или опровержимой* (в зависимости от поставленной задачи).

Обращаем внимание читателя, что отрицание тождественно-истинной формулы имеет своим результатом тождественно-ложную формулу. И, наоборот, отрицание тождественно-ложной формулы имеет своим результатом тождественно-истинную формулу.

В этом легко убедиться, построив таблицу. Предположим, нам дано не «a⊃a∨b», а «¬(a⊃a∨b)». Поскольку эта формула уже не импликация, а отрицание импликации, последним действием становится отрицание всей формулы. Для этого мы в столбце «¬» переписываем значения импликации (столбца 3), меняя эти значения на противоположные:

	1	2	3	4	5	6
	¬	a	⊃	a	∨	b
1	**Л**	И	И	И	И	И
2	**Л**	И	И	И	И	Л
3	**Л**	Л	И	Л	И	И
4	**Л**	Л	И	Л	Л	Л

Усложним задачу.

Предположим, нам предлагается построить таблицу истинности для выражения: «Данное рассуждение неправильное: *Если я выучу логику и высплюсь перед экзаменом, то непременно получу пятёрку. Я выучил логику, но на экзамене пятёрку не получил. Следовательно, я не выспался*».

Постараемся перевести это выражение на формальный язык логики:

a – я выучил логику;
b – я выспался;
¬b – я не выспался;
c – я получил пятёрку;
¬c - я не получил пятёрку.

«Если я выучу логику и высплюсь перед экзаменом, то непременно получу пятёрку»: a∧b⊃c.

«Я выучил логику, но на экзамене пятёрку не получил. Следовательно, я не выспался»: a∧¬c⊃¬b.

Объединим эти две формулу воедино: (a∧b⊃c)⊃(a∧¬c⊃¬b).

Поскольку мы эту формулу отрицаем, то берём её в скобки и ставим перед ней знак отрицания: ¬((a∧b⊃c)⊃(a∧¬c⊃¬b)).

Стоим таблицу (для удобства сохраняя скобки):

¬	((a	∧	b	⊃	c)	⊃	(a	∧	¬c	⊃	¬b))

Поскольку у нас 3 переменные, число строк равно 2^3=8.

¬	((a	∧	b	⊃	c)	⊃	(a	∧	¬c	⊃	¬b))

Присваиваем значение первой переменно «а». Дели количество строк пополам и получаем четыре. Вписываем четыре5 значения «И» и четыре значения «Л»:

¬	((a	∧	b	⊃	c)	⊃	(a	∧	¬c	⊃	¬b))
	И						**И**				
	И						**И**				
	И						**И**				
	И						**И**				
	Л						**Л**				
	Л						**Л**				
	Л						**Л**				
	Л						**Л**				

Присваиваем значения второй переменной «b». Чередуем значение «И» и «Л» вдвое чаще, по отношению к первой переменной «а». Поскольку у нас есть столбец «b» и «¬b», значения в них должны быть противоположными:

¬	((a	∧	b	⊃	c)	⊃	(a	∧	¬c	⊃	¬b))
	И		**И**				И				**Л**
	И		**И**				И				**Л**
	И		**Л**				И				**И**
	И		**Л**				И				**И**
	Л		**И**				Л				**Л**
	Л		**И**				Л				**Л**
	Л		**Л**				Л				**И**
	Л		**Л**				Л				**И**

Аналогично присваиваем значения переменно «с»:

¬	((a	∧	b	⊃	c)	⊃	(a	∧	¬c	⊃	¬b))
	И		И		**И**		И		**Л**		Л
	И		И		**Л**		И		**И**		Л
	И		Л		**И**		И		**Л**		И
	И		Л		**Л**		И		**И**		И
	Л		И		**И**		Л		**Л**		Л
	Л		И		**Л**		Л		**И**		Л
	Л		Л		**И**		Л		**Л**		И
	Л		Л		**Л**		Л		**И**		И

Начинаем вводить значения конъюнкций:

¬	((a	∧	b	⊃	c)	⊃	(a	∧	¬c	⊃	¬b))
	И	**И**	**И**		И		**И**	**Л**	**Л**		Л
	И	**И**	**И**		Л		**И**	**И**	**И**		Л
	И	**Л**	**Л**		И		**И**	**Л**	**Л**		И
	И	**Л**	**Л**		Л		**И**	**И**	**И**		И
	Л	**Л**	**И**		И		**Л**	**Л**	**Л**		Л
	Л	**Л**	**И**		Л		**Л**	**Л**	**И**		Л
	Л	**Л**	**Л**		И		**Л**	**Л**	**Л**		И
	Л	**Л**	**Л**		Л		**Л**	**Л**	**И**		И

Затем – импликаций:

¬	((a	∧	b	⊃	c)	⊃	(a	∧	¬c	⊃	¬b))
	И	**И**	И	**И**	**И**		И	**Л**	Л	**И**	**Л**
	И	**И**	И	**Л**	**Л**		И	**И**	И	**Л**	**Л**
	И	**Л**	Л	**И**	**И**		И	**Л**	Л	**И**	**И**
	И	**Л**	Л	**И**	**Л**		И	**И**	И	**И**	**И**
	Л	**Л**	И	**И**	**И**		Л	**Л**	Л	**И**	**Л**
	Л	**Л**	И	**И**	**Л**		Л	**Л**	И	**И**	**Л**
	Л	**Л**	Л	**И**	**И**		Л	**Л**	Л	**И**	**И**
	Л	**Л**	Л	**И**	**Л**		Л	**Л**	И	**И**	**И**

Выполняем заключительную импликацию:

¬	((a	∧	b	⊃	c)	⊃	(a	∧	¬c	⊃	¬b))
	И	И	И	**И**	И	**И**	И	Л	Л	**И**	Л
	И	И	И	**Л**	Л	**И**	И	И	И	**Л**	Л
	И	Л	Л	**И**	И	**И**	И	Л	Л	**И**	И
	И	Л	Л	**И**	Л	**И**	И	И	И	**И**	И
	Л	Л	И	**И**	И	**И**	Л	Л	Л	**И**	Л
	Л	Л	И	**И**	Л	**И**	Л	Л	И	**И**	Л
	Л	Л	Л	**И**	И	**И**	Л	Л	Л	**И**	И
	Л	Л	Л	**И**	Л	**И**	Л	Л	И	**И**	И

И, наконец, отрицаем всю формулу:

¬	((a	∧	b	⊃	c)	⊃	(a	∧	¬c	⊃	¬b))
Л	И	И	И	И	И	**И**	И	Л	Л	И	Л
Л	И	И	И	Л	Л	**И**	И	И	И	Л	Л
Л	И	Л	Л	И	И	**И**	И	Л	Л	И	И
Л	И	Л	Л	И	Л	**И**	И	И	И	И	И
Л	Л	Л	И	И	И	**И**	Л	Л	Л	И	Л
Л	Л	Л	И	И	Л	**И**	Л	Л	И	И	Л
Л	Л	Л	Л	И	И	**И**	Л	Л	Л	И	И
Л	Л	Л	Л	И	Л	**И**	Л	Л	И	И	И

Формула ¬((a∧b⊃c)⊃(a∧¬c⊃¬b)) оказалась тождественно-ложной. Значит ее противоположность - (a∧b⊃c)⊃(a∧¬c⊃¬b) - тождественно-истинная формула, или закон логики. В данном случае речь идёт о законе *сложной контрапозиции*.

Дополнительная информация

Существует более краткий метод построения таблиц истинности. Он менее монотонный и нудный, но более сложный и, одновременно, интересный.

Предположим, нам надо доказать закон экспортации - (a∧b⊃c)⊃(a⊃(b⊃c)).

Смысл в том, что мы строим своё доказательство от противного (предполагая, что формула ложна) и меняем порядок действий на противоположный: начинаем с эквивалентности «≡», затем переходим к импликации «⊃», затем к дизъюнкции «∨», и, в последнюю очередь, к конъюнкции «∧. Для этого нам понадобится лишь одна строчка:

(a	∧	b	⊃	c)	⊃	(a	⊃	(b	⊃	c))

Поскольку мы пытаемся доказать формулу от противного, мы предполагаем, что она ложна:

(a	∧	b	⊃	c)	⊃	(a	⊃	(b	⊃	c))
					Л					

Импликация ложна в одном случае, когда истинен антецедент (условие), а консеквент (вывод)– ложен, т.е.:

(a	∧	b	⊃	c)	⊃	(a	⊃	(b	⊃	c))
			И		**Л**		**Л**			

Если формула (a⊃(b⊃c)) мы посчитали ложной, это значит, что ее антецедент «a» истинен, консеквент «b» - ложен:

(a	∧	b	⊃	c)	⊃	(a	⊃	(b	⊃	c))
			И		Л	**И**	**Л**		**Л**	

Если формула (b⊃c) ложна, то по закону (по таблице истинности для импликации) «b» должно быть истинным, а «c» - ложным:

(a	∧	b	⊃	c)	⊃	(a	⊃	(b	⊃	c))
			И		Л	И	Л	**И**	**Л**	**Л**

Поскольку переменные «a» и «b» у нас уже имеют истинные значения, мы эти значения переносим в пустые клетки:

(a	∧	b	⊃	c)	⊃	(a	⊃	(b	⊃	c))
И		**И**	И		Л	И	Л	И	Л	Л

Когда конъюнкция верна? Когда верны оба её члена:

(a	∧	b	⊃	c)	⊃	(a	⊃	(b	⊃	c))
И	**И**	**И**	И		Л	И	Л	И	Л	Л

Поскольку антецедент формулы $(a \wedge b \supset c)$ у нас уже обозначен как истинный, нам ничего не остается, как вписать в колонку «с» значение «И»:

(a	∧	b	⊃	c)	⊃	(a	⊃	(b	⊃	c))
И	И	И	И	**И**	Л	И	Л	И	Л	Л

Исчисление завершено. Теперь давайте посмотрим, что мы получили в итоге. Переменная «с» у нас получила значение «И» и «Л». Таким образом, предположив, что формула $(a \wedge b \supset c) \supset (a \supset (b \supset c))$ ложна, мы пришли к противоречию. Значит наше предположение ложно, а формула – истинна.

Важно

Если, применяя краткий метод построения таблицы истинности, мы доказываем её истинность и нам это удается – формула *выполнима*. Если нам это не удаётся – формула *тождественно-ложная*.

Если, применяя краткий метод построения таблицы истинности, мы доказываем её ложность и нам это удается – формула *опровержима*. Если нам это не удаётся – формула *тождественно-истинная*.

Краткий метод построения таблиц используется, когда в формуле присутствует много переменных. Представьте, что Вам необходимо произвести табличное исчисление с шестью, семью или двенадцатью переменными. В этом случае Вам придётся нарисовать 64, 128 и, соответственно, 4096 строчек. Понятно, что невыполнимых задач не существует. Но подобное исчисление может стоить студенту адского труда в течение многих суток, и, что более существенно, необратимой деградации умственного здоровья.

Впрочем, выбор за Вами…

Глава IV. Синтаксис простых суждений

Логика высказываний является важной, но достаточно узкой частью формальной логики. Как только мы переходим к логике предикатов (к анализу внутренней структуры суждений), логический анализ усложняется и начинается действительно творческая работа. Если в логике высказываний разрешимость логической системы очевидна (таблицы истинности являются алгоритмом проверки формул на истинность и ложность), то в логике предикатов подобного метода разрешимости логической системы не существует. И именно это делает логику предикатов особенно привлекательной.

Но, прежде чем перейти к исчислениям логики предикатов, необходимо разобраться в её синтаксисе.

Начнём с того, что в простом суждении есть субъект суждения (логическое подлежащее) и предикат (логическое сказуемое). *Субъектом* в логике называется объект, о котором мы что-то утверждаем или отрицаем. Например,

Иванов двоечник
Идёт дождь
Человек – не насекомое
Они – братья
Я – гений

«Иванов», «дождь», человек», «они», «Я» - субъекты данных высказываний. А то, что мы утверждаем или отрицаем о них – есть *предикаты*. Предикатами в нашем случае являются свойства и отношения «двоечник», «идёт», «не насекомое», «братья», «гений».

Любое простое высказывание имеет одинаковую структуру:

S – P

где «S» - субъект (логическое подлежащее), «P» - предикат (логическое сказуемое) и связка «-», читаемая как «есть», «суть», «является».

Перефразируя наши примеры, мы получаем высказывания логического типа:

Иванов суть двоечник
Дождь есть идущий
Человек не является насекомым
Они являются братьями
Я есмь гений

Важно

В логике предикатов принято два способа написания простых высказываний: «Все S – P» и $\forall x(S(x)\supset P(x))$. Первое читается как «S суть P», второе как *Для всех «x» верно, что, если он обладает свойством «S», то «x» обладает и свойством «P»*. Оба написания идентичны. Нам понадобятся оба написания, поскольку в различных разделах логики иногда удобно первое написание, а иногда – второе.

Из приведённых примеров очевидно, что мы можем либо что-то утверждать об объекте, либо что-то о них отрицать. Поэтому суждения бывают как *утвердительными*, так и *отрицательными* (качественная характеристика суждения):

Все S суть P $\quad \forall x(S(x)\supset P(x))$
Все S не суть P $\quad \forall x(S(x)\supset \neg P(x))$

Кроме того, мы можем что-то утверждать или отрицать как обо всех объектах, так и о некоторых. В этом смысле, суждения могут быть как *общими*, так и *частными* (количественная характеристика суждения):

Все S суть P $\quad \forall x(S(x)\supset P(x))$
Некоторые S не суть P $\quad \exists x(S(x)\wedge \neg P(x))$

Таким образом, мы получаем всего четыре возможных варианта суждений:

A	Обще-утвердительное	Все S суть P	$\forall x(S(x)\supset P(x))$
E	Обще-отрицательное	Все S не суть P	$\forall x(S(x)\supset\neg P(x))$
I	Частно-утвердительное	Некоторые S суть P	$\exists x(S(x)\wedge P(x))$
O	Частно-отрицательное	Некоторые S не суть P	$\exists x(S(x)\wedge\neg P(x))$

Важно

Для общих суждений (с квантором $\forall$) свойства объекта выражаются через импликацию «$\supset$», например, $\forall x(S(x)\supset P(x))$.

Для частных суждений (с квантором $\exists$) свойства объекта выражаются через конъюнкцию «$\wedge$», например, $\exists x(S(x)\wedge P(x))$.

Выражение «Все люди млекопитающие» можно прочесть так: «Для всех людей верно, что, если они люди, то они млекопитающие». А выражение «Некоторые люди млекопитающие» можно прочесть так: «Для некоторых людей верно, что они люди и млекопитающие».

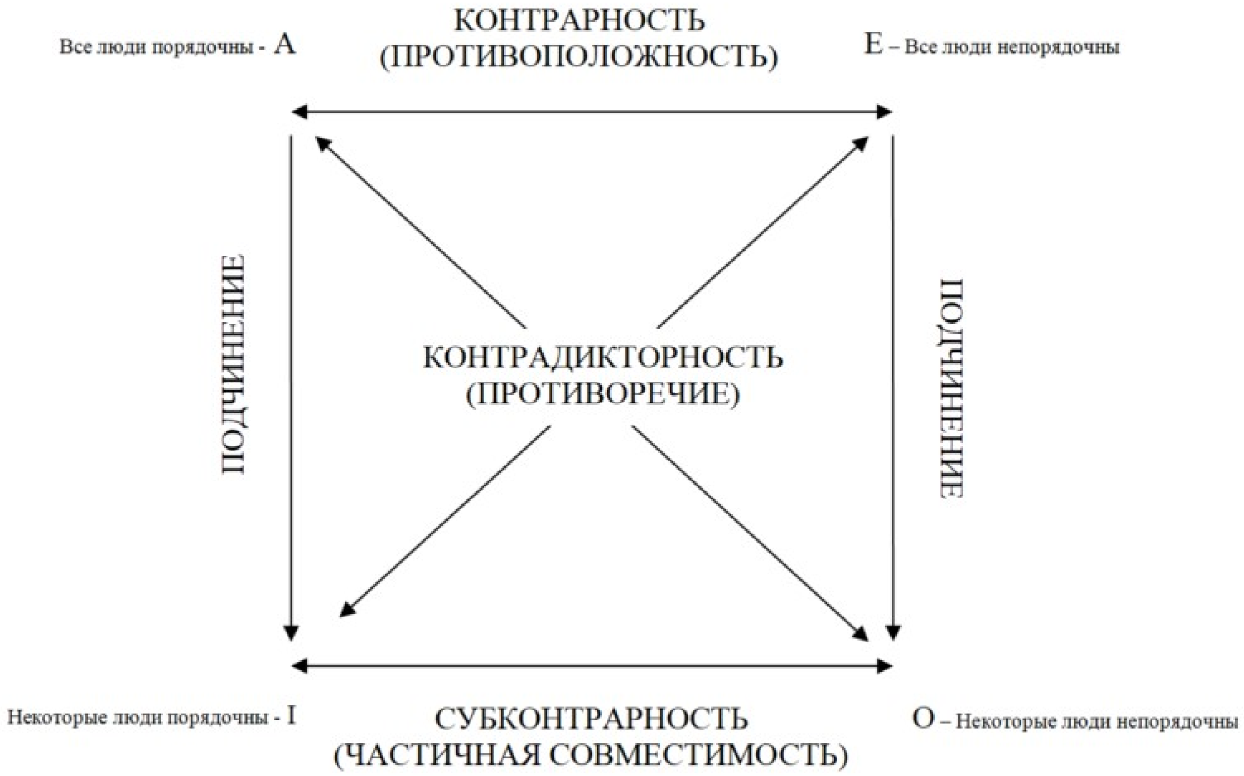
Эту разницу необходимо запомнить.

Строго говоря, кроме частных и общих суждений существуют еще *единичные*, объём которых исчерпывается одним объектом. Это такие суждения, как «Иванов – студент», «Москва – столица России», «Я шагаю по Москве» и т.д. Единичные суждения по своим свойствам идентичны общим суждениям.

Также читатель должен иметь в виду, что любое общее суждение с истинностью преобразуется в частное (но не наоборот). Из выражения «Все люди млекопитающие» мы с истинностью выводим суждение «Некоторые люди млекопитающие» (точнее, «Существует хотя бы один человек-млекопитающее»).

И, наконец, целесообразно запомнить, что, если в каком-либо высказывании отсутствует квантор, то по умолчанию принимается квантор *общности*. Из суждения «Люди – млекопитающие» мы с истинностью выводи суждение «*Все* люди млекопитающие».

Между этими суждениями есть тесная взаимосвязь. Чаще всего эту взаимосвязь показывают на так называемом «логическом квадрате»:



Для нас наиболее интересными являются отношения противоречия (контрадикторности) и противоположности (контрарности). Эту разницу студент должен чётко понимать.

Противоположные суждения не могут быть одновременно истинными, но могут быть одновременно ложными. Про такое отношение обычно говорят: суждения несовместимы по истинности, но могут быть совместимы по ложности. Примером таких суждений может быть:

Все люди философы - *Все люди не являются философами*

Противоречивые суждения несовместимы как по истинности, так и по ложности, т.е. не могут быть одновременно истинными и не могут быть одновременно ложными:

Все люди философы - *Некоторые люди не являются философами*

Именно по этому, противоречивые суждения являются полным *отрицанием* друг друга. Из выше изложенного становится понятной и процедура отрицания простого суждения. Чтобы осуществить отрицание суждения, нужно изменить его качественные и количественные характеристики на противоположные. Технически это осуществляется путём замены квантора на противоположный и отрицания на утверждение (утверждения на отрицание):

суждение	↔	**его отрицание**
¬(Все S суть P)	↔	Некоторые S не суть P
¬(Все S не суть P)	↔	Некоторые S суть P
¬(Некоторые S суть P)	↔	Все S не суть P
¬(Некоторые S не P)	↔	Все S суть P

Данная таблица читается и в обратном направлении:

суждение	↔	**его отрицание**
Все S суть P	↔	¬(Некоторые S не суть P)
Все S не суть P	↔	¬(Некоторые S суть P)
Некоторые S суть P	↔	¬(Все S не суть P)
Некоторые S не P	↔	¬(Все S суть P)

Помимо отрицания суждений есть и иные отношения между простыми суждениями. Важнейшими отношениями между простыми суждениями являются *превращение* и *обращение*.

Операцией превращение называется операция преобразования простого суждения из утвердительного в отрицательное и, наоборот, из отрицательного в утвердительное. Т.е. речь идет об изменении качества суждения.

Для правильной процедуры превращения необходимо запомнить два правила:

1. Отрицание связки эквивалентно отрицанию свойства. Например, выражения «Все S не суть P» эквивалентно выражению «Все S суть не P».

2. Двойное отрицание эквивалентно утверждению, а утверждение эквивалентно двойному отрицанию: A≡¬¬A и ¬¬A≡A.

Зная эти два правила, читатель может самостоятельно проводить операцию превращения. Ясно, выражение «Некоторые люди не являются философами» эквивалентно выражению «Некоторые люди являются не философами». А выражение «Некоторые люди являются философами» эквивалентно выражению «Некоторые люди не являются не философами».

При необходимости, читатель может запомнить эквивалентности, получаемые в результате превращений суждений:

суждение	↔	**его превращение**
Все S суть P	↔	Ни одно S не суть не P
Все S не суть P	↔	Все S суть не P
Некоторые S суть P	↔	Некоторые S не суть не P
Некоторые S не суть P	↔	Некоторые S суть не P

Важно

Процедура превращения может быть крайне полезна в том случае, когда мы имеем, например, с частно-отрицательными суждениями, операции с которым ограничены. Превратив частно-отрицательное суждение в частно-утвердительное, дальнейшие выводы могут стать значительно богаче.

Суть процедуры *обращения* заключается в том, мы меняем субъект и предикат суждения местами. Например, суждения вида «Некоторые люди млекопитающие» эквивалентно суждению «Некоторые млекопитающие – люди».

Сложность обращение заключается в том, что мы не вправе менять местами субъект и предикат *автоматически*. И здесь придется просто запомнить схемы обращения:

суждение	↔	**его обращение**
Все S суть P	↔	Некоторые P суть S
Все S не суть P	↔	Все P не суть S
Некоторые S суть P	↔	Некоторые P суть S
Некоторые S не P	≢	не обращается!

Дополнительная информация

Существует ещё две процедуры преобразования простых суждений - *противопоставление предикату* и *противопоставление субъекту*.

По сути, это не новые типы преобразований, поскольку противопоставление предикату представляет собой последовательное выполнение превращение, а затем обращение высказывания. Соответственно, противопоставление субъекту – это последовательное обращение и, затем, превращение высказывания.

Например, операцию противопоставления предикату можно представить следующим образом: 1. «Некоторые люди не являются философами» → 2. «Некоторые люди являются не философами» (превратили предыдущее суждение) → 3. «Некоторые не философы являются людьми» (обратили предыдущее суждение). Непосредственный переход от первого высказыванию к третьему называется *противопоставлением предикату*.

Операцию противопоставления субъекту можно представить аналогичным образом: 1. «Некоторые люди являются философами» → 2. «Некоторые философы являются людьми» (обратили предыдущее суждение) → 3. «Некоторые философы не являются нелюдями» (превратили предыдущее суждение). Непосредственный переход от первого высказыванию к третьему называется *противопоставлением субъекту*.

Зная правила обращения и превращения, читатель может самостоятельно проводить процедуры противопоставлений. Но, если читателю это делать лень, он может просто запомнить эквивалентности противопоставлений:

Противопоставление предикату:

суждение	↔	**противопоставление предикату**
Все S суть P	↔	Ни одно не P не есть S
Все S не суть P	↔	Некоторые не P суть S
Некоторые S не суть P	↔	Некоторые не P суть S

Противопоставление субъекту:

суждение	↔	**противопоставление субъекту**
Все S суть P	↔	Ни одно P не суть не S
Все S не суть P	↔	Все P суть не S
Некоторые S суть P	↔	Некоторые P не суть не S

Глава V. Классическая и неклассическая силлогистика

Кто из нас не помнит знаменитую Алису из Страны Чудес, придуманную гениальным писателем Льюисом Кэрроллом? Но мало кто из современных студентов знает, что Льюис Кэрролл был не только писателем, но и великим математиком и логиком. В настоящей главе мы будем опираться на труды этого замечательного и остроумного учёного.

Методы, используемые в силлогистике (в силлогистиках) не принято называть «исчислениями». Вместе с тем, как перед исчислениями, так и перед силлогистикой, по сути, стоят одни и те же задачи – получение нового знания из уже имеющегося и проверка этого знания на истинность и ложность.

Силлогизмом принято называть получение умозаключения (вывода) из посылок. В предыдущей главе мы рассматривали непосредственные умозаключения, т.е. выводы, полученные из одной посылки. Эти выводы мы смело можем также называть силлогизмами. Существуют умозаключения, полученные из множества посылок (полисиллогизмы). Но, всё же, *классическим силлогизмом* принято называть получение умозаключения (вывода) из *двух* посылок.

Прежде, чем перейти к анализу силлогизмов, определим терминологию и правила их построения,

Правильный силлогизм гарантирует нам получения истинного знания в любом случае (если соблюдены все правила и структура). *Неправильный силлогизм* может в качестве вывода дать нам как ложный, так и истинный результат. По понятным причинам, мы сосредоточим наше внимание на правильных силлогизмах.

Полисиллогизмом называется вывод из более, чем двух посылок. По сути, полисиллогизм представляет собой «цепочку» классических силлогизмов, о чем речь пойдёт чуть позже.

Соритом называется полисиллогизм, в котором пропущены промежуточные умозаключения и/или некоторые посылки. Напоминает собой логическую задачу, в результате решения которой мы получаем полисиллогизм.

Энтимемой принято называть классический силлогизм, в котором (по разным причинам) пропущена одна из посылок или вывод (умозаключение). Энтимему ещё называют *сокращённым силлогизмом*.

Эпихейрема – это простой силлогизм, посылки которого представляют собой энтимемы.

Классический силлогизм.

Теперь перейдем к правилам. Их восемь. Три правила относятся к качеству (к тому, утверждаем мы что-то в силлогизмах или отрицаем), три – к количеству (условно говоря, к кванторам высказываний) и два правила касаются терминов (к характеристике субъекта «S» и предиката «P» в высказываниях силлогизма):

1. Если одна из посылок – отрицательное суждение ($\neg$), вывод также - отрицательное суждение ($\neg$).
2. Если обе посылки – утвердительные суждения, вывод также утвердителен.
3. Если обе посылки – отрицательные суждения – вывод невозможен.
4. Если одна из посылок частное суждение ($\exists$), вывод также – частное суждение ($\exists$).
5. Если обе посылки общие суждения ($\forall$), вывод может быть как общим ($\forall$), так и частным ($\exists$) – по желанию исследователя.
6. Если обе посылки – частные суждения ($\exists$) – вывод невозможен.
7. Если средний термин не распределен, хотя бы в одной из посылок – вывод невозможен.
8. Термин, нераспределенный в посылках, не может быть распределён в заключении.

Дополнительная информация

Читателю может показаться, что правила силлогистики слишком сложны. Это не так. При минимальной практике эти правила очень быстро становятся для студента «сами собой разумеющимися». Напомним также, что в Древней Греции учёные, понимая какие силлогизмы ложные, а какие истинные, указанных правил ещё не знали. Поэтому они просто заучивали правильные и неправильные силлогизма наизусть, давая им названия. Учитывая, что общее количество возможных силлогизмов равняется двухстах пятидесяти шести (из которых только девятнадцать силлогизмов - правильные), можно, конечно, следуя за древними греками, попытаться зазубрить их наизусть. Но нам представляется, что выучить всего восемь правил, всё же проще.

Пятое правило может быть исключено, если читатель запомнил, что из общего суждения с истинностью выводится частное (поэтому, собственно говоря, в большинстве учебников их всего семь).

Скорее всего, вы обратили внимание на то, что в правилах встречаются понятия, с которыми вы ещё не сталкивались: «распределенный термин» и «средний термин». Постараемся их объяснить.

Силлогизм, в самом ближайшем приближении, имеет структуру

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{S\ суть\ M}\\ \mathbf{M\ суть\ P}\end{array}}{\mathbf{S\ суть\ P}}$$

Горизонтальная черта здесь означает логическое следование («следовательно»). Эта черта отделяет две посылки (первые два выражения) от умозаключения (вывода), который находится под горизонтальной чертой.

Обратите внимание, что помимо известных нам субъекта (S) и предиката (P) здесь появляется еще один термин – M. Этот термин и называется «средним» от латинского «mediocris».

Средним термином называется термин в силлогизме, который входит в обе посылки и не входит в заключение.

Теперь давайте разбираться с распределенными и нераспределенными терминами.

Термин счистится распределенным, если взят в полном объеме. Соответственно, термин является нераспределенным, если взят частично. В какой-то степени мы с Вами уже сталкивались с распределенными и нераспределенными терминами, когда обсуждали кванторы. Понятно, что, когда мы говорим «Все люди…», мы имеем в виду людей в полном объеме. Здесь термин «люди» *распределен*. Если мы говорим «Некоторые люди…», мы имеем в виду не всех людей. Здесь термин *нераспределен*. Напомним, что когда мы говорим просто «Люди…» без кванторов, термин «люди» *распределен по умолчанию*.

С субъектом (логическим подлежащим) мы с Вами разобрались. Но как быть с предикатом (логическим сказуемым)? Как понять, берём мы его в полном объеме или не в полном?

Для этого существует специальное правило, которое следует запомнить: *предикат (логическое сказуемое) распределен в отрицательном суждении, а в утвердительном суждении - нераспределен.*

Дополнительная информация

Как показывает практика студенту легче зазубрить это правило, чем понять его. Тем не менее, постараемся его разъяснить.

Когда мы говорим «Все люди млекопитающие» мы имеем в виду не всех млекопитающих, а лишь тех, к которым относятся люди. Человек не *всякое* млекопитающее. Помимо человека-млекопитающего существуют и свиньи-млекопитающие, и коровы-млекопитающие и кошки-млекопитающие. Именно поэтому в выражении «Все люди млекопитающие» предикат «млекопитающие» взят не в полном объеме, т.е. нераспределен.

Когда же мы говорим «Никто из людей не является тараканом», мы имеем в виду, что любой человек не является *любым* тараканом. Он не имеет отношения к семейству тараканов в его полном объеме. Поэтому предикат «тараканы» в этом суждении взят в полном объеме, т.е. распределен.

В силлогистике не принято использовать кванторы (хотя и не возбраняется). Классическое обозначение распределенности и нераспределенности терминов осуществляется в верхнем индексе субъекта и предиката:

$$\frac{\begin{matrix}\mathbf{S^{+}\ суть\ M^{-}} \\ \mathbf{M^{+}\ суть\ P^{-}}\end{matrix}}{\mathbf{S^{+}\ суть\ P^{-}}}$$

Важно

Нередко студенты, распределив термины в посылках, просто автоматически переписывают «плюсы» и «минусы» в заключение. Если предикат «P^+» был распределен в посылках, следовательно, он должен быть распределен и в заключении «P^+». Это неверно. Распределив термины в посылках, Вы должны распределить термины в заключении безо всякой отсылки к посылкам. И *лишь затем* сопоставить распределенность терминов в посылках и заключении.

Если все сказанное ясно, мы можем перейти к примерам неправильных силлогизмов, обращая внимание на типичные ошибки. Если что-то читатель упустил или не понял, рекомендуем сызнова перечитать начало данной главы.

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Все философы}^{+} - \textit{люди}^{-}\\ \textit{Некоторые люди}^{-} - \textit{невменяемы}^{-}\end{array}}{\textit{Все философы}^{+} - \textit{невменяемы}^{-}}$$

Силлогизм нарушает правило «Если одна из посылок частное суждение (∃), вывод также – частное суждение (∃)».

Попробуем исправить:

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Все философы}^{+} - \textit{люди}^{-}\\ \textit{Некоторые люди}^{-} - \textit{невменяемы}^{-}\end{array}}{\textit{Некоторые философы}^{-} - \textit{невменяемы}^{-}}$$

Опять ошибка – «Если средний термин не распределен, хотя бы в одной из посылок – вывод невозможен».

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Моя мама}^{+}\ \textit{любит кошек}^{-}\\ \textit{Все кошки}^{+}\ \textit{питаются кошачьим кормом}^{-}\end{array}}{\textit{Моя мама}^{+}\ \textit{питается кошачьим кормом}^{-}}$$

Одна из самых типичных студенческих ошибок. Даже не пытайтесь найти здесь ошибку в правилах. На самом деле в данном «силлогизме» вообще отсутствует средний термин «кошки». По сути, этот силлогизм должен был выглядеть так:

$$\begin{array}{c}\textit{Моя мама}^{+}\ \textit{является любителем кошек}^{-}\\ \textit{Все любители кошек}^{+}\ \textit{питаются кошачьим кормом}^{-}\end{array}$$

***

Моя мама $^{+}$ *питается кошачьим кормом* $^{-}$

Теперь, с точки зрения правил и внутренней структуры, силлогизм верен. Однако он неверен с точки зрения истинности второй посылки.

Некоторые поэты $^{-}$ *алкоголики* $^{-}$

Все поэты $^{+}$ *пишут стихи* $^{-}$

***

Все, пишущие стихи, $^{+}$ *алкоголики* $^{-}$

В этом силлогизме нарушено правило: «Если одна из посылок частное суждение (∃), вывод также – частное суждение (∃)».

Исправляем силлогизм:

Некоторые поэты $^{-}$ *алкоголики* $^{-}$

Все поэты $^{+}$ *пишут стихи* $^{-}$

***

Некоторые люди, пишущие стихи, $^{-}$ *алкоголики* $^{-}$

Теперь силлогизм правильный.

Некоторые студенты $^{-}$ *экстремисты* $^{-}$

Все экстремисты $^{+}$ *готовят теракты* $^{-}$

***

Все студенты $^{+}$ *готовят теракты* $^{-}$

В этом силлогизме нарушено правило: «Термин, нераспределенный в посылках, не может быть распределён в заключении». Правильным был бы силлогизм:

Некоторые студенты $^{-}$ *экстремисты* $^{-}$

Все экстремисты $^{+}$ *готовят теракты* $^{-}$

***

Некоторые студенты $^{-}$ *готовят теракты* $^{-}$

Проанализируем еще несколько неправильных силлогизмов:

Все судья $^{+}$ *не берут взяток* $^{+}$

Люди, берущие взятки $^{+}$ *достойны презрения* $^{+}$

***

Все судьи $^{+}$ *достойны презрения* $^{-}$

В этом силлогизме нарушено правило: «Если одна из посылок – отрицательное суждение (¬), вывод также - отрицательное суждение (¬)». Пробуем исправить:

Все судья $^{+}$ *не берут взяток* $^{+}$

Люди, берущие взятки $^{+}$ *достойны презрения* $^{-}$

___

Все судьи $^{+}$ *не достойны презрения* $^{+}$

Опять ошибка: «Термин, нераспределенный в посылках, не может быть распределён в заключении».

Рассмотрим еще несколько силлогизмов:

Все преподаватели $^{+}$ *не преступники* $^{+}$

Преступники $^{+}$ *не порядочные люди* $^{+}$

___

Все преподаватели $^{+}$ *не порядочные люди* $^{+}$

Нарушено правило: «Если обе посылки – отрицательные суждения – вывод невозможен».

Некоторые члены Правительства РФ $^{-}$ *– коррупционеры* $^{+}$

Некоторые коррупционеры $^{-}$ *– убийцы* $^{-}$

___

Некоторые члены Правительства РФ $^{-}$ *убийцы* $^{-}$

В этом силлогизме нарушено правило: «Если обе посылки – частные суждения (∃) – вывод невозможен». Исправляем силлогизм:

Некоторые члены Правительства РФ $^{-}$ *– коррупционеры* $^{+}$

Все коррупционеры $^{+}$ *– жулики* $^{-}$

___

Некоторые члены Правительства РФ $^{-}$ *жулики* $^{-}$

Теперь силлогизм формально верен.

Попробуем проанализировать ошибку, которую часто допускают иностранные студенты:

Вещь, которой я дорожу, $^{+}$ *– эта кость* $^{-}$

Эта кость $^{+}$ *– дурно пахнет* $^{-}$

Вещи, которыми я дорожу, $^{+}$ *дурно пахнут* $^{-}$

Несмотря на то, что все правила данного силлогизма вроде как выполнены, силлогизм всё равно является неправильным в силу неверного грамматического построения. Во-первых, в первой посылке субъект и предикат перепутаны местами. Правильнее было бы сказать «Эта кость является вещью, которой я дорожу». Во-вторых, в заключении неожиданно вместо термина «Вещь» появляется термин «Вещи». Поправим этот силлогизм:

Эта кость $^{+}$ *– вещь, которой я дорожу* $^{-}$

Эта кость $^{+}$ *– дурно пахнет* $^{-}$

Вещь, которой я дорожу, $^{+}$ *дурно пахнет* $^{-}$

Совет

Как уже, наверное, убедился читатель, в силлогистике учитывается не только объем субъектов, но и объём предикатов. Это, в некотором смысле, сближает силлогистику с логикой второго порядка, в которой кванторы используются также и для свойств и отношений высказываний.

Несмотря на то, что классической записью в силлогистике является запись вида «*Все философы* $^{+}$ *– люди* $^{-}$ *»*, читатель, привыкший к кванторам, может обозначить эту фразу, как «∀Ф - ∃Л», а, скажем фразу «*Все судья* $^{+}$ *не берут взяток* $^{+}$*»,* как «∀С ¬ - ∀БЗ».

В любом случае, чтобы не запутаться в латинских переменных, мы рекомендуем в силлогистике использовать русские буквенные сокращения. Так, силлогизм

Белки $^{+}$ *едят орехи* $^{-}$

Крокодилы $^{+}$ *не едят орехи* $^{+}$

Крокодилы $^{+}$ *не белки* $^{+}$

проще записывать сокращенно

Б$^{+}$ - О$^{-}$

К$^{+}$ ¬ - О$^{+}$

$$\overline{К^{+} \neg - Б^{+}}$$

Еще один практический совет. Любое суждение в силлогизме всегда целесообразно перефразировать так, чтобы оно имело связку «есть», «суть», «является», даже, если в результате выражение становится корявым с точки зрения русского языка. Это поможет избежать многочисленных ошибок. Например, фразу «Идёт дождь» лучше перефразировать в «Дождь есть идущий дождь», фразу «Иванов – не учёный» - в «Иванов не является учёным человеком», «Человек – млекопитающее» - в «Человек суть млекопитающее существо» и т.д.

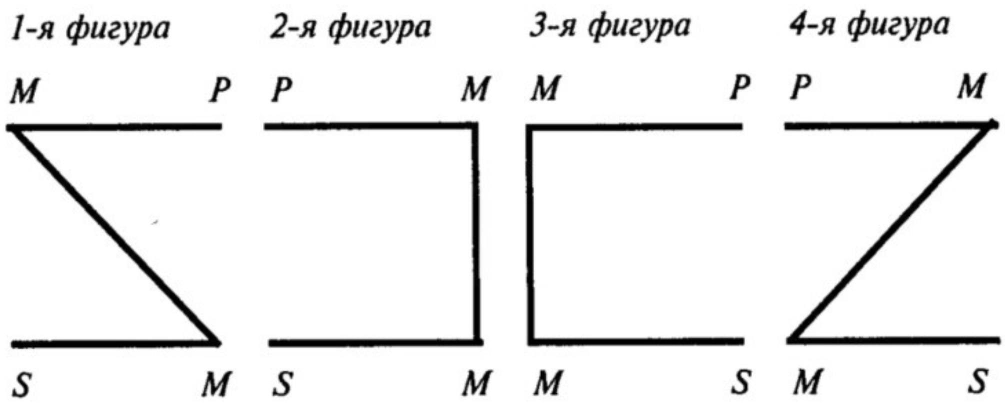
И, наконец, обращаем внимание на то, что всегда следует различать обороты «… не является…» и «… является не…». Мы уже знаем, что высказывания «Иванов не является глупым человеком» и «Иванов является неглупым человеком» - эквивалентны. Но в логике эти высказывания следует принципиально отличать друг от друга:

«Иванов не является глупым человеком» - высказывание отрицательное – «И ¬ - ГЧ».

«Иванов является неглупым человеком» - высказывание утвердительное - «И - ¬ГЧ».

Дополнительная информация

Силлогизмы часто различают по фигурам:



Как видно из таблицы, фигуры определяются положением среднего термина «М».

Существуют также специальные «дополнительные правила фигур».

Для первой фигуры:
1. Б**о**льшая посылка должна быть общей.
2. Меньшая посылка должна быть утвердительной.

Для второй фигуры
1. Б**о**льшая посылка должна быть общей.
2. Одна из посылок должна быть отрицательной.

Для третьей фигуры:
1. Меньшая посылка должна быть утвердительной.
2. Заключение должно быть частным.

Для четвертой фигуры правила не сформулированы.

*Б**о**льшей посылкой* называется посылка, в которую входит предикат «P» (см. таблицу). *Меньшей посылкой* называется посылка, в которую входит субъект «S» (см. таблицу).

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{S^{+}\ суть\ M^{-}}\\ \mathbf{M^{+}\ суть\ P^{-}}\end{array}}{\mathbf{S^{+}\ суть\ P^{-}}}$$

Правила фигур (как и сами фигуры) являются избыточной, невостребованной информацией, если студент следует основным правилам силлогизмов.

Сориты и полисиллогизмы.

Почти любое наше рассуждение, имеющее вывод, мы можем представить в виде одного или более простых категорических силлогизмов. Но в обыденной жизни мы обычно не разговариваем «классическими силлогизмами». Временная мы «глотаем» посылки или заключение, и тогда речь идет об энтимемах, иногда сами посылки выражаются сложными предложениями (эпихейремы), иногда, для вывода мы используем более двух посылок.

Силлогизм, имеющий более двух посылок, называется *полисиллогизмом*. Чтобы проверить полисиллогизм, его можно представить в виде последовательности простых силлогизмов. Чем мы с Вами и займёмся.

Пусть дан *сорит* (полисиллогизм без промежуточных умозаключений):

Люди, хорошо знающие логику, совершают мало ошибок
Прокуроры – не адвокаты
Люди, работающие в генеральной прокуратуре России – прокуроры
Все адвокаты – юристы
Юристы хорошо знают логику

Некоторые люди, совершающие мало ошибок, не работают в генеральной прокуратуре России

Согласитесь, очень сложно сказать, правильный ли сделан вывод. Боле того, не совсем даже понятно, имеет ли вывод вообще какое-то отношение к посылкам.

Для того, чтобы проверить сорит, его надо превратить в полисиллогизм. То есть, его надо представить в виде последовательности классических силлогизмов. Для начала необходимо перевести предложения естественного языка в символическую форму и распределить термины:

Люди, хорошо знающие логику, совершают мало ошибок	$\text{Л}^{+} – \text{МО}^{-}$
Прокуроры – не адвокаты	$\text{П}^{+} \neg - \text{А}^{+}$
Люди, работающие в генеральной прокуратуре России – прокуроры	$\text{ГП}^{+} – \text{П}^{-}$
Все адвокаты – юристы	$\text{А}^{+} – \text{Ю}^{-}$
Юристы хорошо знают логику	$\text{Ю}^{+} – \text{Л}^{-}$
Некоторые люди, совершающие мало ошибок, не работают в генеральной прокуратуре России	$\text{МО}^{+}\neg\text{-ГП}^{+}$

Совет

По возможности, построение полисиллогизма лучше начинать с первой и четвертой фигур (Z-образных фигур). Кроме того, отрицательные, и, особенно, частные суждения нужно оставлять напоследок.

Мы помним, что в каждом силлогизме должен быть средний термин. Это означает, что мы должны искать посылки с общим термином. Например «Л⁺ – МО⁻» и «Ю⁺ – Л⁻», или «П⁺ ¬ - А⁺» и «ГП⁺ – П⁻». Но, поскольку ми с Вами договорились оставлять отрицательные суждения напоследок, начнём с пары «Л⁺ – МО⁻» и «Ю⁺ – Л⁻» (порядок последовательности в паре из двух посылок не имеет значения).

$$\frac{\text{Л}^+ - \text{МО}^- \\ \text{Ю}^+ - \text{Л}^-}{}$$

Мы видим, что средний термин здесь «Л». Значит, в заключении его не должно быть. Соответственно, у нас два варианта заключения: либо «МО – Ю», либо «Ю – МО». Первый вариант менее предпочтителен, поскольку нам придется ослабить термин «МО» (термин нераспределенный в посылке, не может быть распределен в заключении). Значит, выбираем второй вариант:

$$\frac{\text{Л}^+ - \text{МО}^- \\ \text{Ю}^+ - \text{Л}^-}{\text{Ю}^+ - \text{МО}^-}$$

Заключение нашего первого силлогизма «Ю⁺ - МО⁻ » теперь является первой посылкой следующего силлогизма. Соответственно, к этой посылке надо найти пару. То есть надо найти суждение, в котором есть либо термин «Ю», либо термин «МО». У нас есть посылка «А⁺ – Ю⁻», которой мы и воспользуемся:

$$\frac{\text{Ю}^+ - \text{МО}^- \\ \text{А}^+ - \text{Ю}^-}{}$$

Поскольку средним термином здесь является термин «Ю», мы его мысленно вычеркиваем в выводе. Вывод может быть сформулирован либо как «А – МО», било как «МО- А». Руководствуясь теми же соображениями, как и при составлении первого силлогизма, мы выбираем «А – МО»:

$$\frac{\begin{array}{c}Ю^{+} - МО^{-}\\ А^{+} – Ю^{-}\end{array}}{А^{+} - МО^{-}}$$

Теперь уже вывод «$А^{+}$ - $МО^{-}$» становится первой посылкой следующего силлогизма. Выбираем ей пару. Особых вариантов у нас нет. Есть только одна посылка, имеющая такой же термин – «$П^{+}$ ¬ - $А^{+}$». Записываем:

$$\frac{\begin{array}{c}А^{+} - МО^{-}\\ П^{+} \neg - А^{+}\end{array}}{}$$

Поскольку у нас одна из посылок отрицательная, вывод должен быть отрицательным. Варианты вывода: «$МО^{-}$ ¬ - $П^{+}$ » или «$П^{+}$ ¬ - $МО^{+}$». Второй вариант мы выбрать не можем, поскольку термин, нераспределенный в посылках (в нашем случае «$МО^{-}$», не может быть распределен в заключении. Значит, выбираем вариант «$МО^{-}$ ¬ - $П^{+}$»:

$$\frac{\begin{array}{c}А^{+} - МО^{-}\\ П^{+} \neg - А^{+}\end{array}}{МО^{-} \neg - П^{+}}$$

Снова заключение у нас становится первой посылкой следующего силлогизма. Что же касается второй посылки – у нас уже выбора нет: осталась последняя посылка «$ГП^{+}$ – $П^{-}$». Составляем последний силлогизм:

$$\frac{\begin{array}{c}МО^{-} \neg - П^{+}\\ ГП^{+} – П^{-}\end{array}}{МО^{-} \neg - ГП^{+}}$$

«$МО^{-}$ ¬ - $ГП^{+}$» - это единственный грамотный вывод, который мы можем сделать.

Теперь попробуем воспроизвести всю цепочку силлогизмов:

$Л^{+}$ – $МО^{-}$	*Люди, хорошо знающие логику, совершают мало ошибок*
$Ю^{+}$ – $Л^{-}$	*Юристы хорошо знают логику*

$Ю^+$ - $МО^-$ $А^+$ – $Ю^-$	*Юристы совершают мало ошибок* *Все адвокаты – юристы*
$А^+$ - $МО^-$ $П^+$ ¬ - $А^+$	*Адвокаты совершают мало ошибок* *Прокуроры – не адвокаты*
$МО^-$ ¬ - $П^+$ $ГП^+$ – $П^-$	*Некоторые люди, совершающие мало ошибок, - не прокуроры* *Люди, работающие в генеральной прокуратуре России – прокуроры*
$МО^-$ ¬ - $ГП^+$	*Некоторые люди, совершающие мало ошибок, не работают в генеральной прокуратуре России*

Обращаем внимание, что мы не только доказали сорит, подтвердив главный вывод «*Некоторые люди, совершающие мало ошибок, не работают в генеральной прокуратуре России*», но и получили еще несколько вспомогательных выводов: «*Юристы совершают мало ошибок», «Адвокаты совершают мало ошибок», « Некоторые люди, совершающие мало ошибок, - не прокуроры».*

Теперь попробуем совершить обратную процедуру: из полисиллогизма создать сорит. Для этого нам сначала создать полисиллогизм. Усложним задачу: попробуем создать полисиллогизм из всех четырех фигур силлогизмов.

Как мы договорились, вначале будем использовать Z-образные фигуры, избегая отрицательных и частных суждений. Предположим,

Эстрадные артисты$^+$ *любят искусство*$^-$
Любители искусства$^+$ *не любят эстрадных артистов*$^+$
___
?

Притом, что данные посылки явно имеют право на существование, возникает интересная ситуация: мы имеем два средних термина. Эстрадные артисты не любят себя? А, может быть, поклонники искусства себя не любят?

Или нет?

Попробуем перефразировать эти посылки с глаголом «являются»:

Эстрадные артисты$^+$ *являются любителями искусства*$^-$
Любители искусства$^+$*не являются поклонниками эстрадных артистов*$^{-+}$
___

?

Теперь очевидно, что средний термин – «Любители искусства». Мы можем вывести заключение:

Эстрадные артисты$^{+}$ *являются любителями искусства*$^{-}$
Любители искусства$^{+}$ *не являются поклонниками эстрадных артистов*$^{+-}$

Эстрадные артисты$^{+}$ *не являются поклонниками эстрадных артистов*$^{+}$

Если учесть, что современные эстрадные артисты действительно ненавидят друг друга, заключение вполне справедливо.

Сейчас мы нарисовали четвертую фигуру. Попробуем составить первую:

Эстрадные артисты$^{+}$ *не являются поклонниками эстрадных артистов*$^{+}$
Поклонники эстрадных артистов$^{+}$ *интересуются модой*$^{-}$

Некоторые люди, интересующиеся модой, $^{-}$ *- не эстрадные артисты*$^{+}$

Теперь мы «завязли» на втором силлогизме, поскольку дальнейшее продолжение полисиллогизма, по сути, бессмысленно. У нас в заключении частно-отрицательное суждение, с которым очень сложно работать. Кроме того, частно-отрицательное суждение даёт нам минимум информации. Мы пришли к этой ошибке потому, что с самого начала использовали в посылке отрицательное суждение. Напомним еще раз: отрицательные и частные суждения мы оставляем напоследок.

Попробуем еще раз:

Философы$^{+}$ *любознательны*$^{-}$
Любознательные люди $^{+}$ *много читают*$^{-}$

Философы$^{+}$ *много читают*$^{-}$

Это четвертая фигура силлогизма. Попробуем в качестве продолжения использовать первую:

Философы$^{+}$ *много читают*$^{-}$
Логики$^{+}$ *– тоже философы*$^{-}$

Логики$^{+}$ *много читают*$^{-}$

Третья фигура:

Логики$^{+}$ *много читают*$^{-}$
Логики$^{+}$ *обдумывают свои поступки*$^{-}$

Некоторые много читающие люди$^{-}$ *обдумывают свои поступки*$^{+}$

Вторая фигура:

Некоторые много читающие люди$^{-}$ *обдумывают свои поступки*$^{+}$
Уголовники$^{+}$ *не читают много*$^{+}$

Некоторые уголовники$^{+}$ *не обдумывают свои поступки*$^{+}$

Итак, мы получили полисиллогизм:

Философы$^{+}$ *любознательны*$^{-}$
Любознательные люди$^{+}$ *много читают*$^{-}$

Философы$^{+}$ *много читают*$^{-}$
Логики$^{+}$ *– тоже философы*$^{-}$

Логики$^{+}$ *много читают*$^{-}$
Логики$^{+}$ *обдумывают свои поступки*$^{-}$

Некоторые много читающие люди$^{-}$ *обдумывают свои поступки*$^{+}$
Уголовники$^{+}$ *не читают много*$^{+}$

Некоторые уголовники$^{+}$ *не обдумывают свои поступки*$^{+}$

Чтобы превратить полисиллогизм в сорит надо просто вычеркнуть все вспомогательные выводы. Заключительный вывод тоже можно вычеркнуть:

Философы$^{+}$ *любознательны*$^{-}$
Любознательные люди$^{+}$ *много читают*$^{-}$

~~*Философы*$^{+}$ *много читают*$^{-}$~~
Логики$^{+}$ *– тоже философы*$^{-}$

~~*Логики*$^{+}$ *много читают*$^{-}$~~

Логики$^{+}$ обдумывают свои поступки$^{-}$

~~*Некоторые много читающие люди$^{-}$ обдумывают свои поступки$^{+}$*~~

Уголовники$^{+}$ не читают много$^{+}$

~~*Некоторые уголовники$^{+}$ не обдумывают свои поступки$^{+}$*~~

Теперь надо перемешать посылки и предложить этот сорит решить:

Решите сорит:

Логики$^{+}$ обдумывают свои поступки$^{-}$
Уголовники$^{+}$ не читают много$^{+}$
Философы$^{+}$ любознательны$^{-}$
Любознательные люди$^{+}$ много читают$^{-}$
Логики$^{+}$ – тоже философы$^{-}$

Можно также предложить создать сорит из текста, а затем его решить:

«Известно, логики, в отличие от уголовников, прежде чем что-то сделать, обдумывают свои поступки. Потому что логики – философы, а философы люди весьма любознательные и, как любознательные люди любят читать книги».

Энтимемы и эпихейремы.

В обыденной речи (равно как и в научных текстах) люди зачастую пропускают посылку или заключение. Так происходит потому, что пропущенная посылка или пропущенный вывод воспринимаются как нечто само собой разумеющееся. Такие выражения называются сокращенным силлогизмом или энтимемой.

В выражении «Агафонов должен знать логику, поскольку он юрист» явно пропущена посылка «Все юристы должны знать логику». В выражении «У доцента болит живот, поскольку он съел несвежую рыбу» пропущена посылка «Несвежая рыба вызывает боль в животе». В выражении «Я хочу окончить Университет, потому что все выпускники Университета - успешные люди» пропущено заключение «Я хочу стать успешным человеком».

Чтобы проверить энтимему, её надо достроить до простого классического силлогизма. Для этого вначале надо понять, что именно пропущено в энтимеме – посылка или заключение?

Совет

Чтобы «вычислить», что именно пропущено в энтимеме, можно, конечно, создать определенный алгоритм. Можно посоветовать студенту проанализировать имеющиеся в энтимеме высказывания, понять, где антецедент высказывания, а где его консеквент, предложить найти средние термины, а затем определить фигуру силлогизма.

Однако все эти действия, скорее всего, лишь запутают студента. Поэтому рекомендуем полагать здесь на интуицию и здравый смысл.

Пусть дана энтимема «*Сотрудники блестяще владеют английским, поскольку окончили МГИМО*». Мы видим, что здесь ярко выражено условие и следствие. Значит, мы имеет заключение (раз есть следствие), но не имеем одну из посылок. Понятно, что условием здесь является «Закончили МГИМО», а следствием – «Блестяще знают английский». Попробуем воссоздать силлогизм:

Сотрудники$^{+}$ *закончили МГИМО*$^{-}$

?$^{-}$

Сотрудники$^{+}$ *блестяще знают английский*$^{-}$

Поскольку в заключении у нас отсутствует термин «окончили МГИМО», следовательно этот термин средний. Значит, он должен быть и во второй посылке:

Сотрудники$^{+}$ *закончили МГИМО*$^{-}$

Некоторые люди, окончившие МГИМО, блестяще владеют английским$^{-}$

Сотрудники$^{+}$ *блестяще знают английский*$^{-}$

Вторая посылка нами сформулирована таким образом потому, что в МГИМО изучают разные языки. Некоторые студенты в

МГИМО вообще не изучают английский язык. Записав силлогизм таким образом, мы можем сделать вывод, что изначальная энтимема *неверна*. Неверна потому, что в силлогизме нарушено правило «Если одна из посылок частная, то и заключение должно быть частным».

Рассмотрим еще одну энтимему: «*Только очень плохого человека не интересуют чужие проблемы. Наш начальник никогда не интересуется чужими проблемами*». Очевидно, что между этими двумя суждениями нет ярко выраженной причинно-следственной связи. Значит, пропущено заключение:

Только очень плохого человека$^{+}$ *не интересуют чужие проблемы*$^{-}$

Наш начальник$^{+}$ *никогда не интересуется чужими проблемами*$^{-}$

Наш начальник$^{+}$ - очень плохой человек$^{-}$

Силлогизм верен. Значит, была верна и энтимема.

Дополнительная информация

В последнем примере может показаться, что обе посылки отрицательные суждения. Это зависит от формулировки. Если фразу «*Только очень плохого человека не интересуют чужие проблемы*» воспринимать, как «Только очень плохой человек не является интересующимся чужими проблемами» - суждение действительно получится *отрицательным*. Но если эту фразу воспринимать как «Только очень плохой человек суть человек, не интересующийся чужими проблемами», мы получаем *утвердительное* высказывание с отрицательным предикатом «не интересующийся чужими проблемами».

Эпихейрема (это ещё надо выговорить!) – представляет собой силлогизм, в котором обе посылки выражены энтимемами. Таким образом, эпихейрема представляет собой сокращенный полисиллогизм.

Поскольку из данного определения абсолютно ничего не проясняется, перейдём к примерам.

Предположим нам дано рассуждение, истинность которого нам надо подтвердить или опровергнуть: *«Если чиновник берет взят-*

ки, его место в тюрьме! А, если он еще и бездельничает, значит и некоторых бездельников тоже надо сажать! Однозначно!» (Данная фраза является прямой речью одного из действующих российских политиков, фамилию которого мы, по понятным причинам, называть не будем).

Здесь мы, по сути, видим две сложных посылки и заключение:

Если чиновник берет взятки, его место в тюрьме
Если чиновник берет взятки и бездельничает, его место в тюрьме

Некоторые бездельники должны сидеть в тюрьме

Чтобы понять, является ли эта эпихейрема правильной, нам придется «достроить» её до полисиллогизма.

Силлогизм первый:

Этот чиновник⁺ - взяточник⁻
Взяточникам⁺ место в тюрьме⁺

Этому чиновнику⁺ место в тюрьме⁻

Второй силлогизм:

Этому чиновнику⁺ место в тюрьме⁻
Этот чиновник⁺ – бездельник⁻

Некоторым бездельникам⁻ место в тюрьме⁻

Как бы странным не показалось на первый взгляд, но фраза *«Если чиновник берет взятки, его место в тюрьме! А, если он еще и бездельничает, значит и некоторых бездельников тоже надо сажать! Однозначно!»* является с логической точки зрения абсолютно правомерной.

Интересно, знает ли этот политический деятель, что излагает свои мысли эпихейремами и использует в своей речи сокращенные полисиллогизмы?

Глава VI. Система натурального вывода

Считается, что в логике высказывание существует так называемая «разрешающая процедура», т.е. автоматизированная процедура (алгоритм), которая позволяет определить, является ли формула тождественно-ложной, тождественно-истинной или выполнимой. Такой процедурой является построение таблиц истинности (хотя этот способ и не является единственным для логики высказываний).

В логике предикатов (в логике, где мы анализируем отношения внутри высказывания) такой процедуры не существует. Поэтому решение о том, является ли та или иная формула в логике предикатов тождественно-истинной или тождественно-ложной зависит от творческих способностей исследователя.

Тем не менее, существует несколько механизмов, позволяющих исследователю облегчить этот процесс. Одним из самых распространённых является *натуральное исчисление предикатов*. Здесь мы будем опираться на систему, построенную Уиллардом Куайном - знаменитым американским философом, логиком и математиком.

Смысл этого метода заключается в том, что исследователю предлагается несколько правил вывода первого порядка (прямых правил) и несколько правил вывода второго порядка (непрямых правил). *Правила первого порядка* – это правила, в которых из одной формулы следует другая. *Правила второго порядка* (непрямые правила), это правила, которые возникают в результате некой «цепочки» выводов.

Поясним на примере математики. Из формула «2х2» непосредственно следует «4». В логике бы это правило «2х2→4» называлось бы правилом первого порядка или прямым правилом. А вот формула «2+2х2» требует нескольких действий. Сначала мы должны 2 умножить на 2 и получать 4, а затем прибавить к четырем два. В результате мы получим 6. В логике такое правило «2+2х2→6» называлось бы правилом второго рода или непрямым правилом.

Иными словами. Если мы вынуждены, чтобы доказать некую формулу «a» пройти ряд процедур (a→b→c→d→e) чтобы получить в результате «e», вывод «a→e» назывался бы непрямым (выводом второго порядка).

Понятно, что правил второго рода (непрямых правил) может быть сколько угодно, в зависимости от предпочтений исследователя. А вот правила первого рода (прямые правила) весьма ограничены.

Сначала перечислим их, а затем разъясним:

Правила вывода первого рода:

1. $a,b \vDash a \wedge b$ –введение $\wedge$ - конъюнкции - (кратко: В$\wedge$)

Поясняем. Знак «$\vDash$» означает *логическое следование* и читается «следовательно». Название правила «введение конъюнкции» кратко обозначается, как «В$\wedge$». Далее, по аналогии:

2. $a \wedge b \vDash a$ – удаление (исключение) конъюнкции $\wedge$ (кратко У$\wedge$)
3. $\neg(a \wedge b) \vDash \neg a \vee \neg b$ — отрицание $\wedge$ (кратко О$\wedge$)
4. $a \vDash a \vee b$ – введение $\vee$ (В$\vee$)
5. $a \vee b, \neg a \vDash b$ — удаление $\vee$ (У$\vee$)
6. $\neg(a \vee b) \vDash \neg a \wedge \neg b$ — отрицание $\vee$ (О$\vee$)
7. $a \supset b, a \vDash b$ – удаление $\supset$ (У$\supset$)^{1}
8. $a \supset b, \neg b \vDash \neg a$– удаление $\supset$ (У$\supset$)^{2}
9. $a, b \vDash (a \supset b), (b \supset a)$ — введение $\supset$ (В$\supset$)
10. $\neg(a \supset b) \vDash a \wedge \neg b$ — отрицание $\supset$ (О$\supset$)
11. $a \supset b, b \supset a \vDash a \equiv b$ — введение $\equiv$ (В$\equiv$)
12. $a \equiv b \vDash a \supset b, b \supset a$ — удаление $\equiv$ (У$\equiv$)
13. $a \vDash \neg\neg a$ — введение двойного отрицания (В$\neg\neg$)
14. $\neg\neg a \vDash a$ — удаление двойного отрицания (У$\neg\neg$)

Дополнительная информация

Пояснение: в системе натурального вывода закон утверждения консеквента «$b \supset (a \supset b)$» в чистом виде не работает. Закон введения импликации можно рассматривать как закон консеквента лишь с оговоркой: $b \supset (a \supset b)$, где a — *любое допущение в системе вывода*.

Проще говоря, имея в выводе формулу «a», мы имеем право записать «$a \supset b$» или «$b \supset a$», только если «b» где-то встречается в нашей системе выводов.

Правила вывода второго рода (которые нужны в любом случае):

$(a \supset c) \wedge (b \supset c) \vDash (a \vee b) \rightarrow c$ – рассуждение разбором случаев (РРС)

$\neg a \supset (b \wedge \neg b) \vDash a$ – доказательство от противного (ДОП)

$(\Gamma, a \vDash b) \vDash (\Gamma \vDash a \to b)$ — правило дедукции. Читается: если из множества гипотез Г и посылки a логически следует b, то из множества гипотез Г логически следует $a \supset b$.

Дополнительная информация

> Очевидно, что правило введения импликации «a, b ⊨ (a⊃b), (b⊃a)» и правило дедукции «(Г, a⊨ b) ⊨ (Г⊨ a⊃b)» взаимозаменяемы. Однако, для упрощения мы приводим здесь оба правила.
>
> Правило введения импликации можно прочитать так: Если в системе вывода мы имеем «a», а затем «b», то мы вправе сделать вывод «a⊃b».
>
> Правило дедукции мы можем прочитать так: Если из множества посылок следует «b», то мы можем сделать вывод «a⊃b», где «a» - любая посылка из этого множества.

В другом написании эти правила выглядят так:

$$\text{В}\wedge \frac{a, b}{a\wedge b} \quad \text{У}\wedge \frac{a\wedge b}{a} \quad \text{О}\wedge \frac{\neg(a\wedge b)}{\neg a\vee\neg b} \quad \text{В}\vee \frac{a}{a\vee b} \quad \text{У}\vee \frac{a\vee b, \neg a}{b} \quad \text{О}\vee \frac{\neg(a\vee b)}{\neg a\wedge\neg b}$$

$$\text{У}\supset \frac{a\supset b, a}{b} \quad \text{У}\supset \frac{a\supset b, \neg b}{\neg a} \quad \text{В}\supset \frac{a, b}{(a\supset b), (b\supset a)} \quad \text{О}\supset \frac{\neg(a\supset b)}{a\wedge\neg b}$$

$$\text{В}\equiv \frac{a\supset b, b\supset a}{a\equiv b} \quad \text{У}\equiv \frac{a\equiv b}{a\supset b, b\supset a} \quad \text{В}\neg\neg \frac{a}{\neg\neg a} \quad \text{У}\neg\neg \frac{\neg\neg a}{a}$$

$$\text{РРС} \frac{(a\supset c)\wedge(b\supset c)}{(a\vee b)\to c} \quad - \quad \text{ДОП} \frac{\neg a\supset(b\wedge\neg b)}{a}$$

$$\text{ПД} \frac{\Gamma, a \vDash b}{\Gamma\vDash a\supset b}$$

Что значит доказать формулу? Это означает, что мы её сначала разбиваем на части (согласно правилам вывода) а затем собираем по частям (согласно тем же правилам). Простой пример: Надо доказать элементарную формулу вида $a \wedge b$. Записываем ее первым действием:

1. $a \wedge b$
2. a – получаем из действия 1 путем применения правила исключения конъюнкции.
3. b — получаем из действия 1 путем применения правила исключения конъюнкции.
4. $a \wedge b$ — получаем из действий 2 и 3 путем применения правила введения конъюнкции. ■

Формула считается доказанной. Это значит, что она выполнима и не является тождественно-ложной.

Важно

Чтобы доказать, что формула является тождественно-истинной, мы должны строить доказательство «от противного», т.е. должны предположить, что формула ложна. Если мы найдем в формуле противоречие (предположив, что она ложная), значит изначальная формула – тождественно-истинная.

Предположим, дается формула $a \supset (b \supset a)$ - закон ввода истинного антецедента.

Пытаемся понять смысл формулы.

Дано некое «а». Из этого мы делаем вывод, что «а» истинно при условии «b» (по-научному – может ли произвольное «b» имплицировать «а»?)

Постараемся все это перевести на естественный язык.

а — Москва – столица России.

b – Париж столица Франции.

Если верно, что «Москва столица России», следует ли из этого, что «Москва столица России при условии, что Париж столица Франции»?

Пытаемся разобраться. Дана формула $a \supset (b \supset a)$. Доказательство от противного:

Предположим, что формула не верна. Записываем допущение, где эту формулу отрицаем.

Действие первое.

1. $+ \neg(a \supset (b \supset a))$.

Чтобы отрицать формулу, берём её всю в скобки и ставим перед ней знак отрицания «¬». Получаем + ¬(a⊃(b⊃a)).

Действие второе. Вспоминаем, как отрицается импликация. Схема такая: ¬(a⊃b)→a∧¬b. Следовательно, записываем:

2. a∧¬(b⊃a) из 1 по О⊃.

Читаем второе действие так: a∧¬(b⊃a) из первого действия по закону отрицания импликации.

3. a из 2 по У∧.

4. ¬(b→a) из 2 по У∧.

В 3 и 4 действии мы разделили формулу a∧¬(b⊃a) пополам по закону удаления конъюнкции.

5. b∧¬a – из 4 по О⊃.

6. ¬a – из 5 по У∧.

Теперь обратите внимание: у нас есть «¬a» в шестом действии и «a» в третьем действии. Мы создаем противоречие по закону введения конъюнкции:

7. a∧¬a – из 6 и 3 по В∧.

Теперь мы по закону введения импликации соединяем формулы из седьмого и первого действий. Из противоречия выводим отрицание основной формулы:

8. (a∧¬a)⊃¬(a⊃ (b⊃a)) из 7 и 1 по В⊃.

Поскольку из противоречия мы получили отрицание основной формулы, следовательно, мы делаем вывод о том, что верна основная формула. Это – закон доказательства от противного. Записываем последнее действие:

9. a⊃(b⊃a) из 8 по ДОП.■

Значит, рассуждение «Если верно, что «Москва столица России», следовательно «Москва столица России при условии, что Париж столица Фран-ции» — рассуждение верное.

То же самое мы можем проделать, не прибегая к методу доказательства от противного (доказательство более простое, но менее изящное):

Дано:

a⊃(b⊃a)

Доказательство:

1. + a

2. + b.

Т.е., мы берем в качестве посылок антецедент всей формулы (a) и антецедент из консеквента (b⊃a) – «b». Пытаемся составить формулу по правилам натурального вывода.

3. b⊃a – из 1 и 2 по В⊃.

Понятно, что мы можем из двух посылок получить и «a⊃b», и «a⊃a», и «b⊃b», и «a∧b», и «a∨b»... Но для доказательства исходной формулы нам нужно именно «b⊃a». Важно, что это действие мы выполняем строго по законам натурального вывода.

4. a⊃(b⊃a) из 3 и 1 по В⊃. ■

Теперь давайте попробуем решить более сложную теорему. Предположим, что дано (a∧b)⊃c))⊃(a⊃(b⊃c)) – закон экспортации. В качестве допущения принимаем антецеденты формулы:

1. + (a∧b)⊃c
2. + a
3. + b

Для удобства, допущения мы обозначаем знаком «+».

4. a∧b – из 2 и 3 по В∧
5. c – из 1 и 4 по У⊃

Последний пункт надо пояснить. Имея в первом действии (a∧b)⊃c и в четвертом a∧b, легко получаем «c» по правилу (a⊃b), a ╞ b. Правило называется «Удаление импликации» (У⊃).

6. b⊃c из 5 и 3 по В⊃
7. a⊃(b⊃c) из 6 и 2 по В⊃
8. (a∧b)⊃c))⊃(a⊃(b⊃c)) – из 7 и 1 по В⊃■

Попробуем эту же формулу решить методом «от противного». В качестве допущения предположим, что она ложна:

1. + ¬((a∧b)⊃c))⊃(a⊃(b⊃c)))
2. (a∧b)⊃c))∧¬(a⊃(b⊃c)) из 1 по О⊃
3. (a∧b)⊃c) из 2 по У∧
4. ¬(a⊃(b⊃c)) из 2 по У∧
5. a∧¬(b⊃c) из 4 по О⊃

6. a из 5 по У$\wedge$
7. $\neg(b\supset c)$ из 5 по У$\wedge$
8. $b\wedge\neg c$ из 7 по О$\supset$
9. b из 8 по У$\wedge$
10. $\neg c$ из 8 по У$\wedge$
11. $\neg(a\wedge b)$ из 10 и 3 по У$\supset$
12. $\neg a\vee\neg b$ из 11 по О$\wedge$
13. $\neg a$ из 12 и 9 по У$\vee$
14. $\neg a\wedge a$ из 13 и 6 по В$\wedge$
15. $\neg((a\wedge b)\supset c))\supset(a\supset(b\supset c)))\supset(\neg a\wedge a)$ из 1 и 14 по В$\supset$
16. $(a\wedge b)\supset c))\supset(a\supset(b\supset c))$ из 15 по ДОП■

Некоторые действия требуют пояснений.

Действие 11. В выводе мы имеем две формулы «$\neg c$» и «$(a\wedge b)\supset c)$». По правилу удаления импликации «$a\supset b, \neg b) \models \neg a$» получаем формулу «$\neg(a\wedge b)$».

Действие 13. В выводе мы имеем две формулы «$\neg a\vee\neg b$» и «b». По правилу удаления дизъюнкции «$a\vee b, \neg a \models b$» получаем формулу «$\neg(a\wedge b)$».

Действие 14. В этом действии мы достигли главного результата - противоречия.

Действие 15. По правилу введения импликации, мы привели формулу к противоречию. Мы могли бы свести формулу к абсурду, если бы поменяли местами условие и следствие: «$(\neg a\wedge a)\supset\neg((a\wedge b)\supset c))\supset(a\supset(b\supset c)))$». Правило сведения к абсурду и правило доказательства от противного – идентичны.

Действие 16. Поскольку мы доказали ложность нашего предположения (что формула ложна), значит изначальная формула истинна.

Важно

Если мы доказываем формулу «от противного» и нам это удается, значит, формула тождественно-истинная. Если нам это не удается – формула опровержима.

Если мы доказываем формулу «прямым» способом и нам это удается, значит, формула выполнима. Если не удается – формула тождественно-ложная.

Совет

Рекомендуем всякую формулу попытаться решить «от противного».

Если это невозможно, то воспользуйтесь другими советами.

Если формула представляет собой тождество «$A \equiv B$», то решая её «от противного», предположите, что либо антецедент, либо консеквент - ложные. То есть, либо «$\neg(\neg A \supset B)$», либо «$\neg(A \supset \neg B)$».

Если формула представляет собой сложную импликацию вида «$A \supset B \supset C \supset D \supset E$», то в качестве допущений можно взять все формулы, кроме последнего члена импликации.

Если формула представляет собой сложную импликацию вида «$A \supset B \supset C \supset D \supset E$», то её можно решить методом «от противного», взяв в качестве допущений все формулы, кроме последнего члена импликации, и допустить, что последний член импликации ложен.

Для закрепления навыков, попробуем решить еще одну аксиому:

$(a \supset b) \equiv \neg(a \wedge \neg b)$

Сложность в том, что специального правила для отрицания тождества нет.

Мы можем предположить, что эта формула не верна, если отрицаем одну из частей тождества:

$\neg(a \supset b) \equiv \neg(a \wedge \neg b)$ или

$(a \supset b) \equiv (a \wedge \neg b)$

Предположим, мы выбираем второй вариант. Записываем наши предположения в посылках:

1. $+\ a \supset b$
2. $+\ a \wedge \neg b$
3. a – из 2 по У$\wedge$
4. $\neg b$– из 2 по У$\wedge$
5. b– из 1 и 3 по У$\supset$
6. $b \wedge \neg b$– из 5 и 4 по В$\wedge$
7. $(a \wedge \neg b) \supset (b \wedge \neg b)$ – из 2 и 6 по В$\supset$
8. $\neg(a \wedge \neg b)$ – из 7 по ДОП.

Итак, получили промежуточный вывод — $\neg(a \wedge \neg b)$. Вводим новое допущение:

9. + a
10. $\neg a \vee \neg\neg b$ – из 8 по О$\wedge$
11. $\neg\neg b$– из 9 и 10 по У$\supset$
12. b – из 11 по У$\neg\neg$
13. $a \supset b$ – из 9 и 12 по В$\supset$
14. $(a \supset b) \supset \neg(a \wedge \neg b)$ – из 13 и 8 по В$\supset$
15.$\neg(a \wedge \neg b) \supset (a \supset b)$ – из 13 и 8 по В$\supset$
16. $(a \supset b) \equiv \neg(a \wedge \neg b)$ – из 14 и 15 по В$\equiv$ ■

Только что мы строили натуральные выводы для логики высказываний. Но для логики высказываний существует разрешающая процедура – построение таблиц истинности. Для логики предикатов такой процедуры нет. Поэтому натуральные исчисления логики предикатов значительно актуальнее.

Для дальнейшей работы нам необходимо ввести несколько определений.

Терм (t) — предметная (индивидная) переменная или предметная (индивидная) константа в формуле. От простой переменной терм отличается тем, что фиксирует не абстрактную переменную в формуле, а конкретную константу (конкретный объект), либо предметную переменную (множество объектов определённого класса).

Свободное и связанное вхождение переменной в формулу. Свободной называется переменная, не находящаяся под действием кванторов (P(x) — «x» свободна, «x» имеет свободное вхождение в формулу). Связанной называется переменная под действием любого квантора ($\exists x P(x)$ или $\forall x P(x)$ — «x» связана, «x» имеет связанное вхождение в формулу).

Правила кванторов можно сформулировать на основе системы Уилларда Куайна KQ_2 (системы Куайна — KQ_1, KQ_2 и KQ_3 отличаются лишь формулировкой правил кванторов, главным образом В$\forall$ и У$\exists$):

1. $\forall x P(x) \supset P(t)$ – схема удаления $\forall$(У$\forall$)
2. $P(t) \supset \exists x P(x)$ – схема введения $\exists$ (В$\exists$)
3. $P(t) \supset \forall x P(x)$ — схема введения $\forall$ (В$\forall$)

4. $\exists xP(x) \supset P(t)$ – схема удаления $\exists$ (У$\exists$)

В другом написании:

$$\text{У}\forall\ \frac{\forall xP(x)}{P(t)} \quad \text{В}\exists\ \frac{P(t)}{\exists xP(x)} \quad \text{В}\forall\ \frac{P(t)}{\forall xP(x)}\ \text{У}\exists\ \frac{\exists xP(x)}{P(t)}$$

Для двух последних правил — В$\forall$ и У$\exists$ необходима оговорка. Переменные (термы), возникающие в результате применения этих правил, должны быть «ограниченными» (или «отмеченными») . Это означает, что для данных переменных повторное применение этих правил недопустимо. Иными словами, переменная не может быть отмечена (ограничена) более одного раза.

Поясним сказанное на примере. Предположим, надо решить теорему $\exists xP(x) \supset \forall xP(x)$.

1. + $\exists xP(x)$
2. $P(x)$ из 1 по У$\exists$, x — ограничена

Иными словами, используя правила В$\forall$ и У$\exists$ мы ограничиваем переменную (в данном случае «x») и фиксируем это, написав «x — ограничена»

3. $\forall xP(x)$ из 2 по В$\forall$, x — ограничен

Как видим, «x» ограничена два раза, что недопустимо. Следовательно, вывод неправильный.

К четырем правилам натурального вывода предикатов можно добавить еще два. Они не являются необходимыми, но в некоторых случаях могут оказаться весьма полезными:

5. $\neg\forall xP(x) \rightarrow \exists x\neg P(x)$ — правило отрицания $\forall$ (О$\forall$)
6. $\neg\exists xP(x) \rightarrow \forall x\neg P(x)$ — правило отрицания $\exists$ (О$\exists$)

$$\text{О}\forall\ \frac{\neg\forall xP(x)}{\exists x\neg P(x)} \quad \text{О}\exists\ \frac{\neg\exists xP(x)}{\forall x\neg P(x)}$$

Попробуем использовать эти правила для решения всё той же задачи — $\exists xP(x) \supset \forall xP(x)$. Попробуем теперь решить эту задачу «от противного», чтобы создать противоречие. Предположим, что формула $\exists xP(x) \supset \forall xP(x)$ неверна.

1. + $\neg(\exists xP(x) \supset \forall xP(x))$

2. $\exists xP(x) \wedge \neg\forall xP(x)$ — из 1 по О⊃
3. $\exists xP(x)$ — из 2 по У∧
4. $\neg\forall xP(x)$ — из 2 по У∧
5. $\exists x\neg P(x)$ — из 4 по О∀
6. $P(x)$ — из 3 по У∃, *x — ограничена*
7. $\neg P(x)$ — из 5 по У∃, *x — ограничена*

Мы опять пришли к повторному ограничению «х». Формула не доказана. Впрочем, она и не может быть доказана, поскольку неверна.

Чтобы закрепить навыки, попробуем решить задачу посложнее:

$\forall x(S(x) \supset P(x)) \wedge \forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset \forall x(S(x) \supset Q(x))$

1. $+ \neg(\forall x(S(x) \supset P(x)) \wedge \forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset \forall x(S(x) \supset Q(x)))$
2. $(\forall x(S(x) \supset P(x)) \wedge \forall x(P(x) \supset Q(x))) \wedge \neg\forall x(S(x) \supset Q(x))$ — из 1 по О⊃
3. $\forall x(S(x) \supset P(x)) \wedge \forall x(P(x) \supset Q(x))$ — из 2 по О∧
4. $\neg\forall x(S(x) \supset Q(x))$ — из 2 по О∧
5. $\forall x(S(x) \supset P(x))$ — из 3 по О∧
6. $\forall x(P(x) \supset Q(x))$ — из 3 по О∧
7. $S(x) \supset P(x)$ — из 5 по У∀
8. $P(x) \supset Q(x)$ — из 6 по У∀
9. $\exists x\neg(S(x) \supset Q(x))$ — из 4 по О∀

Здесь необходимы пояснения, поскольку у студентов зачастую возникает непонимание: как в системе натурального вывода отрицаются простые суждения.

Дело в том, что до сих пор мы с вами отрицали простые суждения по очень простой формуле:

суждение	↔	**его отрицание**
$\forall xS(x)$	↔	$\exists x\neg S(x)$
$\exists xS(x)$	↔	$\forall x\neg S(x)$
$\exists x\neg S(x)$	↔	$\forall xS(x)$
$\forall x\neg S(x)$	↔	$\exists xS(x)$

Однако теперь, в логике предикатов, мы стали использовать более подробную запись простых суждений. Если выражение

«$\forall xS(x)$» до сих пор означало для нас «Все x суть S», то теперь оно означает «Для всех x, если он S, то он и P».

Поясним. Выражение «*Все люди млекопитающие*» ранее мы записывали как «$\forall xS(x)$». Теперь же мы то же выражение записываем как «$\forall x(S(x)\supset P(x))$». Читаем: «Для всех x правомерно, что, если он человек, то он млекопитающее». Соответственно, выражение «*Некоторые люди млекопитающие*», которое мы обозначали как «$\exists xS(x)$», теперь обозначается «$\exists x(S(x)\wedge P(x))$» и читается соответственно – «Для некоторых x верно, что он человек и млекопитающее».

Последний абзац рекомендуем студентам перечитать несколько раз.

Мы с вами прекрасно знаем, как отрицаются простые суждения. Необходимо изменить квантор на противоположный и изменить качество суждения также на противоположное. С кванторами всё понятно: было Ǝ, стало - ∀; было ∀ - стало Ǝ. Но как поменять качество суждения? Как грамотно превратить утвердительное суждение в отрицательное и наоборот?

Предположим, мы отрицаем суждение «$\forall x(S(x)\supset P(x))$». Первое, что приходит в голову, записать его отрицание так: «$\exists x\neg(S(x)\supset P(x))$». Но, с другой стороны, в частном суждении должна быть не импликация, а конъюнкция: «$\exists x(S(x)\wedge\neg P(x))$». Эквивалентны ли эти записи? Т.е. верно ли, что «$\exists x\neg(S(x)\supset P(x))\equiv\exists x(S(x)\wedge\neg P(x))$»?

На самом деле данные записи являются эквивалентными (основные эквивалентности вы можете посмотреть в приложении к данному учебному пособию). Поэтому,

$$\neg\forall x(S(x)\supset P(x))\leftrightarrow\exists x\neg(S(x)\supset P(x))\leftrightarrow\exists x(S(x)\wedge\neg P(x))$$
$$\neg\exists x(S(x)\wedge P(x))\leftrightarrow\forall x\neg(S(x)\wedge P(x))\leftrightarrow\forall x(S(x)\supset\neg P(x))\leftrightarrow\forall x(\neg S(x)\vee\neg P(x))$$

Продолжим.

10. $\neg(S(x)\supset Q(x))$ — из 9 по УƎ — *x ограничен*
11. $S(x)\wedge\neg Q(x)$ — из 10 по О⊃
12. $S(x)$ — из 11 по У∧
13. $\neg Q(x)$ — из 11 по У∧
14. $P(x)$ — из 7 и 12 по У⊃

15. $Q(x)$ — из 8 и 14 по У$\supset$

16. $Q(x)\wedge\neg Q(x)$ из 15 и 13 по В$\wedge$

17. $\neg(\forall x(S(x)\supset P(x))\wedge\forall x(P(x)\supset Q(x))\supset\forall x(S(x)\supset Q(x)))\supset(Q(x)\wedge\wedge\neg Q(x))$ — из 1 и 16 по В$\supset$

18. $\forall x(S(x)\supset P(x))\wedge\forall x(P(x)\supset Q(x))\supset\forall x(S(x)\supset Q(x))$ — из 17 по ДОП (доказательство от противного). ■

Важно

Напоминаем: Для общих суждений (с квантором $\forall$) свойства объекта выражаются через импликацию «$\supset$», например, $\forall x(S(x)\supset P(x))$.

Для частных суждений (с квантором $\exists$) свойства объекта выражаются через конъюнкцию «$\wedge$», например, $\exists x(S(x)\wedge P(x))$.

Соответственно, мы имеем запись суждений:

Обще-утвердительные - $\forall x(S(x)\supset P(x))$;

Частно-утвердительные - $\exists x(S(x)\wedge P(x))$;

Обще-отрицательные - $\forall x(S(x)\supset\neg P(x))$;

Частно-отрицательные - $\exists x(S(x)\wedge\neg P(x))$.

Логическое следование «$\vDash$ » (на основе правила дедукции) всегда можно преобразовать в импликацию «$\supset$», но не наоборот. Логическое следование более сильный термин, нежели импликация.

Проверим на истинность силлогизма:

Никто из студентов$^{+}$ *не получает пенсию*$^{+}$

Некоторые пенсионеры$^{-}$ *- ворчливые старики*$^{-}$

Некоторые ворчливые старики$^{-}$ *не учатся в вузах*$^{+}$

Переведем его на формальный язык логики:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(S(x)\supset\neg P(x))\\ \exists x(P(x)\wedge Q(x))\end{array}}{\exists x(Q(x)\wedge\neg S(x))}$$

Объединим посылки знаком конъюнкции, а заключение знаком импликации:

$$\forall x(S(x)\supset\neg P(x))\wedge\exists x(P(x)\wedge Q(x))\supset\exists x(Q(x)\wedge\neg S(x))$$

1. + $\neg(\forall x(S(x)\supset\neg P(x))\wedge\exists x(P(x)\wedge Q(x))\supset\exists x(Q(x)\wedge\neg S(x)))$
2. $\forall x(S(x)\supset\neg P(x))\wedge\exists x(P(x)\wedge Q(x))\wedge\neg\exists x(Q(x)\wedge\neg S(x))$ – из 1 по О$\supset$
3. $\forall x(S(x)\supset\neg P(x))$ – из 2 по У$\wedge$
4. $\exists x(P(x)\wedge Q(x))$ – из 2 по У$\wedge$
5. $\neg\exists x(Q(x)\wedge\neg S(x))$ – из 2 по У$\wedge$
6. $S(x)\supset\neg P(x)$ – из 3 по У$\forall$
7. $P(x)\wedge Q(x)$ – из 4 по У$\exists$ *x - ограничен*
8. $\forall x(Q(x)\supset S(x))$ – из 5 по О$\exists$
9. $Q(x)\supset S(x)$ – из 8 по У$\forall$
10. $P(x)$ – из 7 по У$\wedge$
11. $Q(x)$ - – из 7 по У$\wedge$
12. $S(x)$ – из 11 и 9 по У$\supset$
13. $\neg P(x)$ – из 6 и 12 по У$\supset$
14. $P(x)\wedge\neg P(x)$ – из 13 и 10 по В$\wedge$
15. $(P(x)\wedge\neg P(x))\supset\neg(\forall x(S(x)\supset\neg P(x))\wedge\exists x(P(x)\wedge Q(x))\supset\exists x(Q(x)\wedge\neg S(x)))$ – из 14 и 1 по В$\supset$
16. $\forall x(S(x)\supset\neg P(x))\wedge\exists x(P(x)\wedge Q(x))\supset\exists x(Q(x)\wedge\neg S(x))$ – из 15 по ДОП. ■

Пробуем решить эту же формулу с помощью гипотез.

1. + $\forall x(S(x)\supset\neg P(x))$
2. + $\exists x(P(x)\wedge Q(x))$
3. $S(x)\supset\neg P(x)$ – из 1 по У$\forall$
4. $P(x)\wedge Q(x)$ – из 2 по У$\exists$ x - ограничен
5. $P(x)$ – из 4 по У$\wedge$
6. $Q(x)$ – из 4 по У$\wedge$
7. $\neg S(x)$ – из 3 и 5 по У$\supset$
8. $Q(x)\wedge\neg S(x)$ – из 6 и 7 по В$\wedge$
9. $\exists x(Q(x)\wedge\neg S(x))$ - из 8 по В$\exists$
10. $\forall x(S(x)\supset\neg P(x))\wedge\exists x(P(x)\wedge Q(x))$ - из 1 и 2 по В$\wedge$
11. $\forall x(S(x)\supset\neg P(x))\wedge\exists x(P(x)\wedge Q(x))\supset\exists x(Q(x)\wedge\neg S(x))$ - из 9 и 10 по В$\supset$. ■

Совет

В ряде случаев, когда в общей формуле мы встречаем выражение вида «a⊃b», мы можем предположить (ввести допущение), что существует «a». Из этого допущения по правилу удаления импликации, мы получаем «b» (a⊃b, a ⊧ b). Для подобных частных случаев мы вправе сформулировать своё собственное правило второго порядка: «a⊃b ⊧ a, b).

Дополнительная информация

Для исчисления в системе логики предикатов, можно использовать и аксиоматические механизмы. Данный механизм исчисления более узкий, но, для некоторых частных задач более простой. Здесь мы пользуемся правилами натурального вывода логики высказываний. Но добавляем вместо правил кванторов четыре схемы и одно правило.

Вообще, *схемой аксиом*, может служить любая доказанная тождественно-истинная формула. При этом, аксиома служит «прототипом» бесконечного множества истинных формул, построенных по форме (схеме) этой аксиомы.

Возьмем, к примеру, закон утверждения консеквента – «B⊃(A⊃B)». Это тождественно-истинная формула (при желании, студент может её доказать). А это значит, что любая формула такого вида (такой схемы) также является тождественно-истинной. Поэтому, встретив в выводе формулу подобной схемы, доказывать её уже не имеет смысла. Можно просто сослаться на данную схему и принять истинность формулы данный схемы по аналогии.

Когда мы говорим, что аксиома служит «прототипом» бесконечного количества истинных формул, мы имеем ввиду, что схема «B⊃(A⊃B)» может быть выражена как «c⊃(a⊃c)», «d⊃(c⊃d)», «c∨b⊃(a⊃(c∨b))», «(d⊃(c⊃d))⊃(¬z⊃(d⊃(c⊃d))) и т.д.

Студент может самостоятельно добавлять схемы аксиом в свою систему исчислений. Для этого достаточно убедиться, что добавленная аксиома действительно является аксиомой (тождественно-истинной формулой). Кроме того, *поскольку правила натурального вывода и правила аксиоматической системы исчислений не противоречат друг другу, читатель может смело использовать все известные ему правила одновременно.*

Основными правилами аксиоматической системы исчисления предикатов остаются те же, что мы использовали в системе натурального вывода. Однако, меняются правила кванторов:

1. $\forall xP(x) \vDash P(t)$ – схема удаления $\forall$ (У$\forall$)

Пояснение: если каждый «х» имеет признак Р, то признак Р имеет и константа «t» (из множества «х»).

«Если все в группе ЮРДб хорошо знают логику, то и г-н Агафонов (из группы ЮРДб) тоже хорошо знает логику»

2. $P(t) \vDash \exists xP(x)$ – схема введения $\exists$ (В$\exists$)

Пояснение: Если мы имеем константу «t», обладающую признаком Р, то верно, что некоторые «х» (из множества, в которое входит «t») тоже обладают признаком Р.

«Если г-н Агафонов из группы ЮРДб хорошо знает логику, следовательно, некоторые студенты ЮРДб хорошо знают логику» (если быть более точным, то «Если г-н Агафонов из группы ЮРДб хорошо знает логику, следовательно, существует хотя бы один студент из группы ЮРДб хорошо знающий логику»

3. $\forall x(A \supset P(x)) \vDash (A \supset \forall xP(x))$ – схема введения $\forall$ в консеквент (В$\forall$вК).

Пояснение: Если для всех «х» верно, что он имеет признак Р при условии А, то при условии А признак Р будет свойственен *всем* «х».

«Если все студенты хорошо успевают, то они получают стипендию → Если студенты хорошо успевают, то все они получают стипендию».

4. $\forall x(P(x) \supset A) \vDash (\exists xP(x) \supset A)$ – схема введения $\exists$ в антецедент (В$\exists$вА).

Пояснение: если для всех «х» верно, что некий признак Р ведет к результату А, то это верно и для некоторых «х».

«Если все студенты, хорошо учась, получают стипендию, следовательно, это верно и для некоторых студентов».

5. $P(t) \vDash \forall xP(x)$ — правило обобщения (В$\forall$), при условии, что терм «t» не был ранее связан квантором $\exists$ и не является константой.

«Если студенты ЮРДб хорошо знают логику, следовательно, *все* студенты ЮРДб хорошо знают логику».

Глава VII. Семантические таблицы

Существует еще один эффективный способ проверки формул на истинность и ложность – построение *семантических таблиц* или таблиц Бэта (в честь Эверта Бэта – создателя данного метода).

Считается, семантические таблицы не работают там, где необходимо проанализировать формулы, содержащие знаки эквивалентности и строгой дизъюнкции. Это действительно так. Но кто нам мешает путём эквивалентных преобразований «перестроить» формулу и избавиться от знаков эквивалентности и строгой дизъюнкции?

Для этого весьма полезными будут следующие эквивалентные преобразования:

приведение формул к импликации —
$(a \wedge b) \equiv \neg(a \supset \neg b) \wedge \neg(b \supset \neg a)$
$(a \vee b) \equiv (\neg a \supset b) \wedge (\neg b \supset a)$
$(a \equiv b) \equiv (a \supset b) \wedge (b \supset a)$
$(a \vee b) \equiv (\neg a \supset b) \wedge (\neg b \supset a)$

приведение формул к конъюнкции —
$(a \supset b) \equiv \neg(a \wedge \neg b)$
$(a \vee b) \equiv \neg(\neg a \wedge \neg b)$
$(a \vee b) \equiv \neg((a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b))$
$(a \equiv b) \equiv (a \vee \neg b) \wedge (b \vee \neg a)$

приведение формул к дизъюнкции —
$(a \wedge b) \equiv \neg(\neg a \vee \neg b)$
$(a \supset b) \equiv (\neg a \vee b)$
$(a \vee b) \equiv (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$
$(a \equiv b) \equiv (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$

Для начала повторим правила (описанные в различных учебниках), затем поясним методику построения таблиц.

Для построения семантических таблиц созданы специальные *правила редукции*.

$\neg$Л. Если формула $\neg A$ имеется в левом столбце таблицы (подтаблицы), то в правом столбце той же таблицы (подтаблицы) пишем A

$\neg$Пр. Если формула $\neg A$ имеется в правом столбце, то в левом столбце пишем A

$\wedge$Л. Если формула $A\wedge B$ имеется в левом столбце таблицы (подтаблицы), то в том же столбце пишем формулы A и B.

$\wedge$Пр. Если формула $A\wedge B$ находится в правом столбце таблицы (подтаблицы), то в каждом из столбцов образуем две новые альтернативные подтаблицы этого столбца и в левой подтаблице правого столбца пишем A, а в правой таблице того же столбца – B.

$\vee$Л. Если формула $A\vee B$ находится в левом столбце таблицы (подтаблицы), то в каждом из столбцов образуем две новые альтернативные подтаблицы и в левой из них (левого столбца) пишем A, а в правой (того же столбца) – B.

$\vee$Пр. Если формула $A\vee B$ находится в правом столбце таблицы (подтаблицы), то в том же столбце пишем формулы A и B.

$\supset$Л. Если формула $A\supset B$ находится в левом столбце таблицы (подтаблицы), то в каждом из столбцов образуем две новые альтернативные подтаблицы и в правой подтаблице левого столбца пишем формулу B, а в левой подтаблице правого столбца пишем A.

$\supset$Пр. Если формула $A\supset B$ находится в правом столбце таблицы (подтаблицы), то в левом столбце той же таблицы пишем формулу A, а в правом – B.

$\forall$Л. Если формула $\forall\alpha A(\alpha)$ находится в левом столбце таблицы (подтаблицы), то в том же столбце помещаем формулу $A(\beta)$, где β – произвольная индивидная переменная или константа, $A(\beta)$ есть результат правильной подстановки β вместо α в $A(\alpha)$. Эвристический совет: в качестве β нужно взять индивидную константу, которая уже встречается в подтаблице, или переменную, которая имеет свободные вхождения в какую-то из формул подтаблицы; если таковых нет, то вводится произвольная индивидная константа.

$\forall$Пр. Если формула $\forall\alpha A(\alpha)$ находится в правом столбце таблицы (подтаблицы), то в тот же столбец помещаем формулу $A(\beta)$, где β – новая индивидная константа, т.е. константа, не встречающаяся еще ни в левом, ни в правом столбцах, а A(β) есть результат правильной подстановки β в A(α) вместо α.

ƎЛ. Если формула ƎαA(α) находится в левом столбце таблицы (подтаблицы), то в тот же столбец помещаем формулу A(β), где β – новая индивидная константа; A(β) – результат правильной подстановки индивидной константы β в A(α) вместо α.

ƎПр. Если формула Ǝα A(α) находится в правом столбце таблицы (подтаблицы), то в тот же столбец помещаем формулу A(β), где β – произвольная индивидная переменная или константа, а A(β) – то же, что и в пояснении к правилу ∀Л. Эвристический совет тот же, что описан при формулировке правила ∀Л.

Альтернативная подтаблица (а если таковых нет, то таблица) является замкнутой, если некоторая формула входит в ее левый и правый столбцы. Таблица является замкнутой, если замкнуты все ее альтернативные подтаблицы.

Предположим, дано:

$$\forall x(P(x)\supset Q(x))\wedge\forall x(R(x,a)\supset\neg Q(x))\wedge\forall x(\neg P(x)\supset\neg S(x)) \models \forall x(R(x,a)\supset\neg S(x)).$$

Первой, второй и третьей посылками являются формулы: $\forall x(P(x)\supset Q(x))$, $\forall x(R(x,a)\supset\neg Q(x))$, $\forall x(\neg P(x)\supset\neg S(x))$, а заключением – формула $\forall x(R(x,a)\supset\neg S(x))$. Строя семантическую таблицу, в левый столбец пишем формулы, соответствующие посылкам, а в правый – формулу, соответствующую заключению. Далее применяем правила редукции:

<table>
<tr>
<td>
∀x(P(x) ⊃ Q(x))
∀x(R(x, a) ⊃ ¬Q(x))
∀x(¬P(x) ⊃ ¬S(x))
2. R(b, a) ⊃ ¬Q(b)
3. ¬P(b) ⊃ ¬S(b)
4. P(b) ⊃ Q(b)
5. R(b, a)
6. S(b)
<table>
<tr><td>(1)</td><td>(2)</td></tr>
<tr><td></td><td>7. ¬Q(b)
<table>
<tr><td>(3)</td><td>(4)</td></tr>
<tr><td>10. P(b)
<table>
<tr><td>(5)</td><td>(6)</td></tr>
<tr><td>12. Q(b)</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>9. ¬S(b)</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>
</td>
<td>
∀x(R(x, a) ⊃ ¬S(x))
1. R(b, a) ⊃ ¬S(b)
5. ¬S(b)
<table>
<tr><td>(1)</td><td>(2)</td></tr>
<tr><td>7. R(b,a)</td><td>8. Q(b)
<table>
<tr><td>(3)</td><td>(4)</td></tr>
<tr><td>9. ¬P(b)
<table>
<tr><td>(5)</td><td>(6)</td></tr>
<tr><td></td><td>12. P(b)</td></tr>
</table>
</td><td>11. S(b)</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Важно

С нашей точки зрения, семантические таблицы проще строить в **сокращенном** виде, не используя такое количество правил редукции (только эквивалентности) и, особо не увлекаясь дроблением ветвей таблицы.

Ту же самую задачу можно было отразить проще:

$\forall x(P(x) \supset Q(x))$

$\forall x(R(x, a) \supset \neg Q(x))$

$\forall x(\neg P(x) \supset \neg S(x))$

$\neg \forall x(R(x, a) \supset \neg S(x))$

1. $P(x) \supset Q(x)$
2. $R(x, a) \supset \neg Q(x)$
3. $\neg P(x) \supset \neg S(x)$
4. $\neg(R(x, a) \supset \neg S(x))$
5. $R(x, a) \wedge S(x)$ – из 4 по О$\supset$
6. $R(x, a)$ – из 5 по У$\wedge$
7. $S(x)$- из 5 по У$\wedge$

$\neg P(x)$		$Q(x)$	
$P(x)$	$\neg S(x)$		
		$\neg R(x, a)$	$\neg Q(x)$

Совет

Главное, надо понять логику построения семантических таблиц:

— если мы имеем конъюнкцию — $a \wedge b$, то вписываем в выводе «a» и «b», не размножая таблицу;

— если мы имеем дизъюнкцию — $a \vee b$, то размножаем таблицу и в одном столбце пишем «a», а в другом – «b».

Все остальные формулы мы преобразуем в конъюнкцию или дизъюнкцию по эквивалентностям:

$(a \supset b) \rightarrow \neg a \vee b$

$\neg(a \supset b) \rightarrow a \wedge \neg b$

$\neg(a \wedge \neg b) \rightarrow \neg a \vee \neg b$

$\neg(a \vee \neg b) \rightarrow \neg a \wedge \neg b$

Попробуем подробно решить ещё одну задачу. Необходимо обосновать выводимость

$$\exists x(P(x) \wedge R(x)), \forall x(R(x) \supset S(x)) \models \exists x(S(x) \wedge P(x)).$$

Всегда рассуждаем методом от противного.

Предположим, что выводимость не верна:

$$\exists x(P(x) \wedge R(x)) \wedge \forall x(R(x) \supset S(x)) \not\models \neg \exists x(S(x) \wedge P(x)).$$

1. $\exists x(P(x) \wedge R(x))$
2. $\forall x(R(x) \supset S(x))$
3. $\neg \exists x(S(x) \wedge P(x))$

Следующим шагом пытаемся «избавиться» от кванторов:

1. $\exists x(P(x) \wedge R(x))$
2. $\forall x(R(x) \supset S(x))$
3. $\neg \exists x(S(x) \wedge P(x))$
4. $P(x) \wedge R(x)$ – из 1 по У$\exists$ – *x ограничен*
5. $R(x) \supset S(x)$ - из 2 по У$\forall$
6. $\forall x \neg (S(x) \wedge P(x))$ – из 3 по О$\exists$
7. $\neg (S(x) \wedge P(x))$ – из 6 по У$\forall$

Теперь смотрим, какие формулы мы можем еще получить, не размножая таблицу. Очевидно, из действия 4 мы можем получить две формулы путем удаления конъюнкции:

1. $\exists x(P(x) \wedge R(x))$
2. $\forall x(R(x) \supset S(x))$
3. $\neg \exists x(S(x) \wedge P(x))$
4. $P(x) \wedge R(x)$ – из 1 по У$\exists$ – *x ограничен*
5. $R(x) \supset S(x)$ - из 2 по У$\forall$
6. $\forall x \neg (S(x) \wedge P(x))$ – из 3 по О$\exists$
7. $\neg (S(x) \wedge P(x))$ – из 6 по У$\forall$
8. $P(x)$ – из 4 по У$\wedge$
9. $R(x)$ - из 4 по У$\wedge$

Далее придется размножать таблицу, поскольку формулы $R(x) \supset S(x)$ (№5) и $\neg (S(x) \wedge P(x))$ (№7) путем эквивалентных преобразования превращаются в дизъюнкции – «$\neg R(x) \vee S(x)$» и «$\neg S(x) \vee \neg P(x)$». С какой именно из них начинать – значения не имеет. Давайте начнём с «$\neg R(x) \vee S(x)$»:

<table>
<tr><td colspan="2">1. ∃x(P(x)∧R(x))
2. ∀x(R(x)⊃S(x))
3. ¬∃x(S(x)∧P(x))
4. P(x)∧R(x) – из 1 по У∃ – x ограничен
5. R(x)⊃S(x) - из 2 по У∀
6. ∀x¬(S(x)∧P(x)) – из 3 по О∃
7. ¬(S(x)∧P(x)) – из 6 по У∀
8. P(x) – из 4 по У∧
9. R(x) - из 4 по У∧</td></tr>
<tr><td>¬R(x)</td><td>S(x)</td></tr>
</table>

Получаем первое противоречие: R(x) в действии №9 и ¬R(x) в подтаблице. Чтобы зафиксировать это противоречие, замкнем подтаблицу:

<table>
<tr><td colspan="2">1. ∃x(P(x)∧R(x))
2. ∀x(R(x)⊃S(x))
3. ¬∃x(S(x)∧P(x))
4. P(x)∧R(x) – из 1 по У∃ – x ограничен
5. R(x)⊃S(x) - из 2 по У∀
6. ∀x¬(S(x)∧P(x)) – из 3 по О∃
7. ¬(S(x)∧P(x)) – из 6 по У∀
8. P(x) – из 4 по У∧
9. R(x) - из 4 по У∧</td></tr>
<tr><td>¬R(x)</td><td>S(x)</td></tr>
</table>

В оставшуюся ветку таблицы вписываем последние формулы

<table>
<tr><td>1. ∃x(P(x)∧R(x))
2. ∀x(R(x)⊃S(x))
3. ¬∃x(S(x)∧P(x))
4. P(x)∧R(x) – из 1 по У∃ – x ограничен
5. R(x)⊃S(x) - из 2 по У∀</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">6. ∀x¬(S(x)∧P(x)) – из 3 по OƎ
7. ¬(S(x)∧P(x)) – из 6 по У∀
8. P(x) – из 4 по У∧
9. R(x) - из 4 по У∧</td></tr>
<tr><td>¬R(x)</td><td colspan="2">S(x)</td></tr>
<tr><td></td><td>¬S(x)</td><td>¬P(x)</td></tr>
</table>

Видим противоречие «¬S(x)» и «S(x)» - замыкаем подтаблицу.

Видим противоречие «¬P(x)» и «P(x)» (из действия №8) – замыкаем таблицу.

Все подтаблицы замкнуты:

<table>
<tr><td colspan="3">1. Ǝx(P(x)∧R(x))
2. ∀x(R(x)⊃S(x))
3. ¬Ǝx(S(x)∧P(x))
4. P(x)∧R(x) – из 1 по УƎ – x ограничена
5. R(x)⊃S(x) - из 2 по У∀
6. ∀x¬(S(x)∧P(x)) – из 3 по OƎ
7. ¬(S(x)∧P(x)) – из 6 по У∀
8. P(x) – из 4 по У∧
9. R(x) - из 4 по У∧</td></tr>
<tr><td>¬R(x)</td><td colspan="2">S(x)</td></tr>
<tr><td></td><td>¬S(x)</td><td>¬P(x)</td></tr>
</table>

В литературе можно встретить иной (с эстетической точки зрения) вид семантических таблиц. Последняя таблица может быть составлена так:

1. $\exists xP(x)\wedge R(x)$

2. $\forall xR(x)\supset S(x)$

3. $\neg\exists xS(x)\wedge P(x)$

4. $P(x)\wedge R(x)$ – из 1 по У$\exists$ (x отмечена)

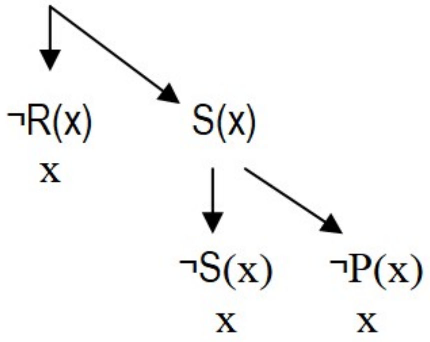
5. $R(x)\supset S(x)$ - из 2 по У$\forall$

6. $\forall x\neg(S(x)\wedge P(x))$ – из 3 по О$\exists$

7. $\neg(S(x)\wedge P(x))$ – из 6 по У$\forall$

8. $P(x)$ - из 4 по У$\wedge$

9. $R(x)$ – из 4 по У$\wedge$



В этой форме написания семантической таблицы размножение таблицы обозначено стрелками, а замыкание знаком «x».

Поскольку таблица замкнулась, наше предположение о том, что формула не верна – ошибочно. Следовательно, выводимость

$\exists x(P(x)\wedge R(x)), \forall x(R(x)\supset S(x)) \vDash \exists x(S(x)\wedge P(x))$ – истинна.

Мы могли бы использовать формулы в другом порядке, но результат бы от этого не изменился:

1. $\exists x(P(x)\wedge R(x))$
2. $\forall x(R(x)\supset S(x))$
3. $\neg\exists x(S(x)\wedge P(x))$
4. $P(x)\wedge R(x)$ – из 1 по У$\exists$ – *x ограничена*
5. $R(x)\supset S(x)$ - из 2 по У$\forall$
6. $\forall x\neg(S(x)\wedge P(x))$ – из 3 по О$\exists$
7. $\neg(S(x)\wedge P(x))$ – из 6 по У$\forall$
8. $P(x)$ – из 4 по У$\wedge$
9. $R(x)$ - из 4 по У$\wedge$

<table>
<tr><td colspan="2">$\neg S(x)$</td><td>$\neg P(x)$</td></tr>
<tr><td>$\neg R(x)$</td><td>$S(x)$</td><td></td></tr>
</table>

Попробуем методом семантических таблиц проверить силлогизм. (Понятно, что семантические таблицы могут проверять не только силлогизмы – их функционал значительно шире):

Логики используют семантические таблицы
Некоторые логики – поэты
___
Некоторые поэты используют семантические таблицы

Данный силлогизм переводим на формальный язык: $\forall x(S(x)\supset(P(x)), \exists x(S(x)\wedge R(x)) \models \exists x(R(x)\wedge P(x))$

<table>
<tr><td colspan="3">1. $\forall x(S(x)\supset(P(x))$
2. $\exists x(S(x)\wedge R(x))$
3. $\neg\exists x(R(x)\wedge P(x))$
4. $S(x)\supset(P(x)$ – из 1 по У$\forall$
5. $S(x)\wedge R(x)$- из 2 по У$\exists$ – *x - ограничена*
6. $\forall x\neg(R(x)\wedge P(x))$ – из 3 по О$\exists$
7. $\neg(R(x)\wedge P(x))$ – из 6 по У$\forall$
8. $S(x)$ – из 5 по У$\wedge$
9. $R(x)$ – из 5 по У$\wedge$</td></tr>
<tr><td>$\neg S(x)$</td><td colspan="2">$P(x)$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\neg R(x)$</td><td>$\neg P(x)$</td></tr>
</table>

Нередко в зарубежной литературе можно встретить следующее написание:

1. $\forall x(S(x)\supset(P(x))$
2. $\exists x(S(x)\wedge R(x))$
3. $\neg\exists x(R(x)\wedge P(x))$
4. $S(x)\supset(P(x)$ – из 1 по У$\forall$
5. $S(x)\wedge R(x)$- из 2 по У$\exists$ – *x - ограничена*
6. $\forall x\neg(R(x)\wedge P(x))$ – из 3 по О$\exists$
7. $\neg(R(x)\wedge P(x))$ – из 6 по У$\forall$
8. $S(x)$ – из 5 по У$\wedge$
9. $R(x)$ – из 5 по У$\wedge$

$\neg S(x)$ $\quad$ $P(x)$

$\neg R(x)$ $\quad$ $\neg P(x)$

Ради эксперимента, попробуем построить семантическую таблицу для неправильного силлогизма:

Логики используют семантические таблицы
Некоторые логики – поэты
___
Все поэты используют семантические таблицы

Выводимость, видимо, должна быть такой:

$\forall x(S(x)\supset (P(x)), \exists x(S(x) \wedge R(x)) \vDash \forall xR(x)\supset P(x))$

1. $\forall x(S(x)\supset(P(x))$
2. $\exists x(S(x)\wedge R(x))$
3. $\neg\forall x(R(x)\wedge P(x))$
4. $S(x)\supset(P(x)$ – из 1 по У$\forall$
5. $S(x)\wedge R(x)$- из 2 по У$\exists$ – *x ограничена*
6. $\exists x\neg(R(x)\wedge P(x))$ – из 3 по О$\exists$
7. $\neg(R(x)\wedge P(x))$ – из 6 по У$\exists$ – *x ограничена*

«X» ограничена дважды, следовательно доказать формулу не представляется возможным.

Глава VIII. Исчисления секвенций

Исчисление секвенций (от англ. Sequent calculus) — система формального вывода формул логики первого порядка предложенная немецким логиком Герхардом Генценом. Генценом были разработаны несколько эквивалентных вариантов исчисления секвенций.

Секвенциальные формулы представляют собой последовательность, разделенную знаком выводимости «⊦», в которой слева (в антецеденте) находится дизъюнктивная последовательность, а справа (в консеквенте, или в «сукцеденте») – конъюнктивная. В целом, секвенциальная формула выглядит следующим образом:

$$(a \vee b \vee c \vee d \vee \ldots \vee z) \vdash (a \wedge b \wedge c \wedge d \wedge \ldots \wedge z)$$

Подразумевается, что обе части уравнения эквивалентны в том смысле, что антецедент служит доказательством сукцедента, а сукцедент служит доказательством антецедента:

$$(a \vee b \vee c \vee d \vee \ldots \vee z) \leftrightarrow (a \wedge b \wedge c \wedge d \wedge \ldots \wedge z)$$

Секвенция с пустым антецедентом интерпретируется как истина, а секвенция с пустым сукцедентом – как ложь. Если пустыми оказываются как антецедент, так и сукцедент - секвенция интерпретируется в качестве противоречия:

$\emptyset \vdash (a \wedge b \wedge c \wedge d \wedge \ldots \wedge z)$ – «истина»
$(a \vee b \vee c \vee d \vee \ldots \vee z) \vdash \emptyset$ - «ложь»
$\emptyset \vdash \emptyset$ - «противоречие»

Логические правила

$$\wedge L \ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \qquad \vee R \ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$$

$$\vee L \ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \mid \Sigma, B \vdash \Pi}{\Gamma, \Sigma, A \vee B \vdash \Delta, \Pi} \qquad \wedge R \ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \mid \Sigma \vdash B, \Pi}{\Gamma, \Sigma \vdash A \wedge B, \Delta, \Pi}$$

$$\supset L\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \mid \Sigma, B \vdash \Pi}{\Gamma, \Sigma, A \supset B \vdash \Delta, \Pi} \qquad \supset R\ \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \supset B, \Delta}$$

$$\neg L\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \qquad \neg R\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}$$

$$\forall L\ \frac{\Gamma, A[x/t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall t A \vdash \Delta} \qquad \forall R\ \frac{\Gamma \vdash A[x/y], \Delta}{\Gamma \vdash \forall y A, \Delta}$$

$$\exists L\ \frac{\Gamma, A[x/y] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists y A \vdash \Delta} \qquad \exists R\ \frac{\Gamma \vdash A[x/t], \Delta}{\Gamma \vdash \exists t A, \Delta}$$

где «t» — любая переменная (возможно «x», если «x» - свбодная переменная));

где «y» - любая новая переменная (либо уже имеющаяся перемененная «x», не связанная кванторами в Γ и Δ).

Эти две важнейшие оговорки мы объясним чуть позже на примерах.

Структурные правила:

$$WL\ \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad WR\ \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$$

$$CL\ \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad CR\ \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$$

$$PL\ \frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta} \qquad PR\ \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}$$

$$\text{I (аксиома)}\ \frac{}{A \vdash A} \qquad \text{CUT (сечение)}\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \mid A, \Sigma \vdash \Pi}{\Gamma, \Sigma \vdash \Delta, \Pi}$$

Символы «Γ», «Δ», «Σ» и «Π» означают множества формул (возможно пустые).

Читатель, вероятно, уже обратил внимание, что правила исчисления секвенций не являются чем-то принципиально новым для нас. Все эти правила (в том или ином виде) мы встречали в системе натурального вывода.

Примеры вывода.

Пусть необходимо доказать аксиому «$\vdash A \supset A$».

$$\Sigma_1.\ A \vdash A \text{ – аксиома}$$
$$\Sigma_2.\ \vdash A \supset A \text{ – из } \Sigma_1 \text{ по } \supset R\ \blacksquare$$

Пусть необходимо доказать аксиому «$\vdash A \vee \neg A$».

$\Sigma_1.\ A \vdash A$	I – аксиома
$\Sigma_2.\ \vdash \neg A, A$	из Σ_1 по $\neg R$
$\Sigma_3.\ \vdash A, \neg A$	из Σ_2 по PR
$\Sigma_4.\ \vdash A, A \vee \neg A$	из Σ_3 по $\vee R$
$\Sigma_5.\ \vdash A \vee \neg A$	из Σ_4 по CR ■

Часто, для доказательства формулы необходимо наличие нескольких аксиом. Например, если мы доказываем формулу «$A, B \vdash A \wedge B$», возможна следующая последовательность действий:

$\Sigma_1.\ A \vdash A$ – аксиома
$\Sigma_2.\ B \vdash B$ – аксиома
$\Sigma_3.\ A, B \vdash A \wedge B$ – из Σ_1 и Σ_2 по $\wedge R$ ■

Студент должен знать, что помимо линейного способа доказательства можно использовать табличный способ, отличающийся некоторыми эстетическими особенностями. Так, в табличной форме последнее доказательство выглядело бы так:

$$\frac{A \vdash A\ \ (\mathrm{I}) \qquad B \vdash B\ \ (\mathrm{I})}{A, B \vdash A \wedge B}\ \wedge R$$

Табличная форма исчислений более распространена в практике исчисления секвенций, однако, она крайне неудобна для изложения в книжной полиграфии (по определенным техническим причинам).

Доказательство формулы «$(A\supset(B\vee C))\supset(((B\supset\neg A)\wedge\neg C)\supset\neg A)$» табличным способом:

$B \vdash B$	- I	$C \vdash C$	- I
		$B\vee C \vdash B, C$	- $\vee$L
		$B\vee C \vdash C, B$	- PR
$B\vee C, \neg C \vdash B$	- $\neg$L	$\neg A \vdash \neg A$	- I
		$(B\vee C), \neg C, (B\supset\neg A) \vdash \neg A$	- $\supset$L
		$(B\vee C), \neg C, ((B\supset\neg A)\wedge\neg C) \vdash \neg A$	- $\wedge$L
		$(B\vee C), ((B\supset\neg A)\wedge\neg C), \neg C \vdash \neg A$	- PL
$A \vdash A$	- I	$(B\vee C), ((B\supset\neg A)\wedge\neg C), ((B\supset\neg A)\wedge\neg C) \vdash \neg A$	- $\wedge$L
$\vdash \neg A, A$	- $\neg$R	$(B\vee C), ((B\supset\neg A)\wedge\neg C) \vdash \neg A$	- CL
$\vdash A, \neg A$	- PR	$((B\supset\neg A)\wedge\neg C), (B\vee C) \vdash \neg A$	- PL
		$((B\supset\neg A)\wedge\neg C), (A\supset(B\vee C)) \vdash \neg A, \neg A$	- $\supset$L
		$((B\supset\neg A)\wedge\neg C), (A\supset(B\vee C)) \vdash \neg A$	- CR
		$(A\supset(B\vee C)), ((B\supset\neg A)\wedge\neg C) \vdash \neg A$	- PL
		$(A\supset(B\vee C)) \vdash (((B\supset\neg A)\wedge\neg C)\supset\neg A)$	- $\supset$R
		$\vdash (A\supset(B\vee C))\supset(((B\supset\neg A)\wedge\neg C)\supset\neg A)$	- $\supset$R

Доказательство формулы «$(A\supset(B\vee C))\supset(((B\supset\neg A)\wedge\neg C)\supset\neg A)$» линейным способом:

Σ_1. $B \vdash B$– аксиома
Σ_2. $C \vdash C$ - аксиома
Σ_3. $B\vee C \vdash B, C$ – из Σ_1 и Σ_2 по $\vee$L
Σ_4. $B\vee C \vdash C, B$ из Σ_3 по PR
Σ_5. $B\vee C, \neg C \vdash B$ из Σ_4 по $\neg$L
Σ_6. $\neg A \vdash \neg A$ - аксиома
Σ_7. $(B\vee C), \neg C, (B\supset\neg A) \vdash \neg A$ - из Σ_5 и Σ_6 по $\supset$L
Σ_8. $(B\vee C), \neg C, ((B\supset\neg A)\wedge\neg C) \vdash \neg A$ – из Σ_7 по $\wedge$L
Σ_9. $(B\vee C), ((B\supset\neg A)\wedge\neg C), \neg C \vdash \neg A$ - из Σ_8 по PL
Σ_{10}. $(B\vee C), ((B\supset\neg A)\wedge\neg C), ((B\supset\neg A)\wedge\neg C) \vdash \neg A$- из Σ_9 по $\wedge$L
Σ_{11}. $(B\vee C), ((B\supset\neg A)\wedge\neg C) \vdash \neg A$ - из Σ_{10} по CL
Σ_{12}. $((B\supset\neg A)\wedge\neg C), (B\vee C) \vdash \neg A$ - из Σ_{11} по PL
Σ_{13}. $\vdash \neg A, A$ - из Σ_1 по $\neg$R
Σ_{14}. $\vdash A, \neg A$ - из Σ_{13} по PR
Σ_{15}. $((B\supset\neg A)\wedge\neg C), (A\supset(B\vee C)) \vdash \neg A, \neg A$ - из Σ_{14} и Σ_{12} по $\supset$L
Σ_{16}. $((B\supset\neg A)\wedge\neg C), (A\supset(B\vee C)) \vdash \neg A$ - из Σ_{15} по CR

Σ_{17}. $(A \supset (B \vee C)), ((B \supset \neg A) \wedge \neg C) \vdash \neg A$ - из Σ_{16} по PL
Σ_{18}. $(A \supset (B \vee C)) \vdash (((B \supset \neg A) \wedge \neg C) \supset \neg A)$ - из Σ_{17} по $\supset$R
Σ_{19}. $\vdash (A \supset (B \vee C)) \supset (((B \supset \neg A) \wedge \neg C) \supset \neg A)$ - из Σ_{18} по $\supset$R ■

Мы специально привели достаточно сложный и длинный пример исчисления секвенций, чтобы использовать максимально большое количество правил. Разобрав каждый вывод, для студента в дальнейшем не будет сложностей с исчислением секвенций.

Но для классической логики работа с секвенциями связана также с использование правил кванторов. Для начала разберем незамысловатую задачу.

Пусть необходимо доказать формулу

«$\exists y(\forall x(p(x, y))) \vdash \forall x(\exists y(p, (x, y)))$»

Σ_1. $p(x, y) \vdash p(x, y)$	I – аксиома
Σ_2. $\forall x(p(x, y)) \vdash p(x, y)$	из Σ_1 по $\forall$L
Σ_3. $\forall x(p(x, y)) \vdash \exists x(p(x, y))$	из Σ_2 по $\exists$R
Σ_4. $\exists y(\forall x(p(x, y))) \vdash \exists x(p(x, y))$	из Σ_3 по $\exists$L
Σ_5. $\exists y(\forall x(p(x, y))) \vdash \forall x(\exists y(p, (x, y)))$	из Σ_4 по $\forall$R ■

Напомним, что для правил кванторов есть определенные ограничения (как и во всех остальных системах исчислений). Если для правил $\forall$L и $\exists$R ограничения несущественны, то для правил $\forall$R и $\exists$L следует помнить: получаемая переменная не должна быть связана в предыдущих выводах кванторами.

Предположим, мы хотим построить доказательство формулы вида «$\exists xP(x) \vdash \exists xP(x)$». Интуитивно мы понимаем, что какие бы кванторы не находились в антецеденте и сукцеденте формулы, ошибочным может быть только один вариант - «$\exists xP(x) \vdash \forall xP(x)$».

Начинаем, как обычно, с аксиомы:

Σ_1. $P(x) \vdash P(x)$ – аксиома
Σ_2. $P(x) \vdash \exists xP(x)$ – из Σ_1 по $\exists$R
Σ_3. $\exists xP(x) \vdash \exists xP(x)$ – из Σ_2 по $\exists$L

Вывод построен неверно, поскольку правило $\exists$L в третьем действии нарушено: мы использовали переменную «x», которая уже была связана квантором общности во втором действии. Третье действие мы могли бы завершить только так:

Σ_1. $P(x) \vdash P(x)$ – аксиома
Σ_2. $P(x) \vdash \exists xP(x)$ – из Σ_1 по $\exists R$
Σ_3. $\forall xP(x) \vdash \exists xP(x)$ – из Σ_2 по $\forall L$

В целом, у нас получилась правильная формула, однако мы так и не доказали искомую - «$\exists xP(x) \vdash \exists xP(x)$». Может быть наша ошибка заключалась в том, что мы начали не с той стороны? Попробуем еще раз:

Σ_1. $P(x) \vdash P(x)$ – аксиома
Σ_2. $\exists xP(x) \vdash P(x)$ – из Σ_1 по $\exists L$
Σ_3. $\exists xP(x) \vdash \exists xP(x)$ – из Σ_2 по $\exists R$

Теперь правила выполнены.

Совет

Соответственно, делаем для себя важный вывод: в исчислениях секвенций последовательность действий имеет значение. Сначала надо стараться использовать правила $\forall R$ и $\exists L$, пока переменные не связаны кванторами. И лишь затем правила $\forall L$ и $\exists R$.

Вероятнее всего, последовательность действий будет важна и для решения формулы «$\exists xP(x) \vdash \exists xP(x)$»:

Σ_1. $P(x) \vdash P(x)$ – аксиома
Σ_2. $\forall xP(x) \vdash P(x)$ – из Σ_1 по $\forall L$
Σ_3. $\forall xP(x) \vdash \forall xP(x)$ – из Σ_2 по $\forall R$

Вывод Σ_3 сделан с нарушением правила $\forall R$. Пробуем в другой последовательности:

Σ_1. $P(x) \vdash P(x)$ – аксиома
Σ_2. $P(x) \vdash \forall xP(x)$ – из Σ_1 по $\forall R$
Σ_3. $\forall xP(x) \vdash \forall xP(x)$ – из Σ_2 по $\forall L$

Теперь всё верно.

Попробуем усложнить задачу и доказать закон отрицания общеутвердительного суждения «$\neg\forall xP(x) \vdash \exists x\neg P(x)$»:

Σ_1. $\neg P(x) \vdash \neg P(x)$ – аксиома
Σ_2. $\vdash P(x), \neg P(x)$– из Σ_1 по $\neg R$
Σ_3. $\vdash \forall xP(x), \neg P(x)$– из Σ_2 по $\forall R$
Σ_4. $\neg\forall xP(x) \vdash \neg P(x)$– из Σ_3 по $\neg L$
Σ_5. $\neg\forall xP(x) \vdash \exists x\neg P(x)$– из Σ_4 по $\exists R$ ■

Теперь попробуем доказать формулу, записанную в расширенном виде «$\vdash \exists x(S(x)\wedge\neg P(x))\supset\neg\forall x(S(x)\supset P(x))$».

Поскольку у нас два предиката, начнём построение секвенций с двух аксиом:

Σ_1. $S(x) \vdash S(x)$ – аксиома
Σ_2. $P(x) \vdash P(x)$ – аксиома

Мы должны получить импликацию, следовательно, преминяем закон $\supset L$:

Σ_3. $S(x), S(x)\supset P(x) \vdash P(x)$ – из Σ_1 и Σ_2 по $\supset L$

Теперь надо получит конъюнкцию. Проще всего это сделать, прибавив произвольный термин в антецеденте формулы:

Σ_4. $S(x)\wedge\neg P(x), S(x)\supset P(x) \vdash P(x)$ – из Σ_3 по $\wedge L$

Перенеся из сукцедента в антецедент формулу «$P(x)$», получим повторение формулы «$\neg P(x)$». Повторение убираем по правилу CL:

Σ_5. $S(x)\wedge\neg P(x), \neg P(x), S(x)\supset P(x) \vdash$ – из Σ_4 по $\neg L$
Σ_6. $S(x)\wedge\neg P(x), S(x)\supset P(x) \vdash$ – из Σ_5 по CL

Далее, вводим кванторы:

Σ_7. $\exists x(S(x)\wedge\neg P(x)), S(x)\supset P(x) \vdash$ – из Σ_6 по $\exists L$

Σ_8. $\exists x(S(x)\wedge\neg P(x)), \forall x(S(x)\supset P(x)) \vdash$ – из Σ_7 по $\forall L$

И, наконец, переносим формулу «$\forall x(S(x)\supset P(x))$» из антецедента в сукцедент с отрицанием по правилу $\neg R$:

Σ_9. $\exists x(S(x)\wedge\neg P(x)) \vdash \neg\forall x(S(x)\supset P(x))$– из Σ_8 по $\neg R$
Σ_{10}. $\vdash \exists x(S(x)\wedge\neg P(x))\supset\neg\forall x(S(x)\supset P(x))$– из Σ_9 по $\supset R$ ■

Последнее действие совершено по правилу «$\supset R$», напоминающему правило дедукции.

Последнее исчисление представим в табличной форме:

$S(x) \vdash S(x)$ – (I) $\quad P(x) \vdash P(x)$ – (I)	
$S(x), S(x)\supset P(x) \vdash P(x)$	$\supset L$
$S(x)\wedge\neg P(x), S(x)\supset P(x) \vdash P(x)$	$\wedge L$
$S(x)\wedge\neg P(x), \neg P(x), S(x)\supset P(x) \vdash$	$\neg L$
$S(x)\wedge\neg P(x), S(x)\supset P(x) \vdash$	CL
$\exists x(S(x)\wedge\neg P(x)), S(x)\supset P(x) \vdash$	$\exists L$
$\exists x(S(x)\wedge\neg P(x)), \forall x(S(x)\supset P(x)) \vdash$	$\forall L$
$\exists x(S(x)\wedge\neg P(x)) \vdash \neg\forall x(S(x)\supset P(x))$	$\neg R$
$\vdash \exists x(S(x)\wedge\neg P(x))\supset\neg\forall x(S(x)\supset P(x))$	$\supset R$

Как и в натуральной системе исчислений, в исчислении секвенций целесообразно применять дополнительные правила. Ими могут служить доказанные аксиомы и эквивалентности, известные законы логики, правила, используемые в аксиоматических системах и системе натурального вывода.

Например, правило Modus Ponens (иногда именуемое как «*правило исключения импликации*»)

$$\frac{\Gamma \vdash A\supset B, \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

К этому правилу можно добавить

Сведение к абсурду $\dfrac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash}$

Доказательство от противного $\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash}{\Gamma \vdash A}$

$$\textit{Введение конъюнкции}\ \frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

$$\textit{Удаление конъюнкции}\ \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}$$

$$\textit{Правило удаления импликации}\ \frac{\Gamma, \vdash A \supset B}{\Gamma, A \vdash B}$$

$$\textit{Правило контрапозиции}\ \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \neg B \vdash \neg A}$$

и так далее.

Используя дополнительные правила (например правило сведения к абсурду), некоторые задачи можно решить короче. Например, выводимость «$\vdash \forall x(S(x) \supset P(x)) \supset \forall x(\neg S(x) \vee P(x))$»:

Σ_1. $S(x) \supset P(x) \vdash S(x) \supset P(x)$ – аксиома

Σ_2. $S(x) \supset P(x), S(x) \vdash P(x)$ из Σ_1 по правилу удаления импликации

Σ_3. $S(x) \supset P(x), S(x) \vdash \neg S(x) \vee P(x)$ из Σ_2 по $\vee R$

Σ_4. $S(x) \supset P(x) \vdash \neg S(x) \vee P(x), \neg S(x)$ из Σ_3 по $\neg R$

Σ_5. $S(x) \supset P(x), \neg(\neg S(x) \vee P(x)), \vdash \neg S(x)$ из Σ_4 по $\neg R$

Σ_6. $S(x) \supset P(x), \neg(\neg S(x) \vee P(x)), \vdash \neg S(x) \vee P(x)$ из Σ_5 по $\vee R$

Σ_7. $\neg(\neg S(x) \vee P(x)) \vdash \neg(\neg S(x) \vee P(x))$ - аксиома

Σ_8. $S(x) \supset P(x), \neg(\neg S(x) \vee P(x)) \vdash$ - из Σ_6 и Σ_7 по правилу сведения к абсурду

Σ_9. $S(x) \supset P(x) \vdash \neg S(x) \vee P(x)$ - из Σ_8 по $\neg R$

Σ_{10}. $S(x) \supset P(x) \vdash \forall x(\neg S(x) \vee P(x))$ - из Σ_9 по $\forall R$

Σ_{11}. $\forall x(S(x) \supset P(x)) \vdash \forall x(\neg S(x) \vee P(x))$ - из Σ_{10} по $\forall L$

Σ_{12}. $\vdash \forall x(S(x) \supset P(x)) \supset \forall x(\neg S(x) \vee P(x))$ - из Σ_{11} по правилу дедукции■

Обращаем внимание на то, что в решении данной формулу мы применили два новых правила: правило удаления импликации (в действии 2) и правило сведения к абсурду (действие 8).

Понятно, что любая секвенция может иметь несколько решений. Например, формулу «$\vdash \forall x(S(x) \supset P(x)) \supset \forall x(\neg S(x) \vee P(x))$» можно решить по-другому:

Σ_1. $S(x) \supset P(x) \vdash S(x) \supset P(x)$ – аксиома

Σ_2. $S(x)\supset P(x), S(x) \vdash P(x)$ из Σ_1 по правилу удаления импликации
Σ_3. $S(x)\supset P(x) \vdash P(x), \neg S(x)$ из Σ_2 по $\neg R$
Σ_4. $S(x)\supset P(x) \vdash P(x), \neg S(x)\vee P(x)$ из Σ_3 по $\vee R$
Σ_5. $S(x)\supset P(x) \vdash \neg S(x)\vee P(x), \neg S(x)\vee P(x)$ из Σ_4 по $\vee R$
Σ_6. $S(x)\supset P(x) \vdash \neg S(x)\vee P(x)$ из Σ_5 по CR
Σ_7. $S(x)\supset P(x) \vdash \forall x(\neg S(x)\vee P(x))$ - из Σ_6 по $\forall R$
Σ_8. $\forall x(S(x)\supset P(x)) \vdash \forall x(\neg S(x)\vee P(x))$ - из Σ_7 по $\forall L$
Σ_9. $\vdash \forall x(S(x)\supset P(x))\supset\forall x(\neg S(x)\vee P(x))$ - из Σ_8 по правилу дедукции■

В качестве альтернативы построению семантических и аналитических таблиц, секвенциальные исчисления могут использоваться для построения «деревьев» в логике высказываний. Все правила остаются теми же, но доказательство ведется не из аксиом, а из самой доказываемой формулы.

Решаем последнюю формулу, опустив кванторы. Пусть дано «$\vdash S(x)\supset P(x)\supset\neg S(x)\vee P(x)$».

Найдя в формуле знак основной импликации, мы перестраиваем формулу в «$S(x)\supset P(x) \vdash \neg S(x)\vee P(x)$».

Поскольку в формуле есть дизъюнкция, значит, у нас появляется альтернатива: либо «$S(x)\supset P(x) \vdash \neg S(x)$», либо «$S(x)\supset P(x) \vdash P(x)$».

Теперь необходимо каким-то образом «разбить» импликацию. Преобразуем «$S(x)\supset P(x)$» в «$\neg S(x)\vee P(x)$». Таким образом, получаем еще две альтернативы: «$\neg S(x) \vdash \neg S(x)$», «$P(x) \vdash \neg S(x)$» и «$\neg S(x) \vdash P(x)$», «$P(x) \vdash P(x)$». Поскольку в последних альтернативах мы наблюдаем аксиомы, следовательно, искомая формула верная.

$$\vdash S(x)\supset P(x)\supset\neg S(x)\vee P(x)$$

$$S(x)\supset P(x) \vdash \neg S(x)\vee P(x)$$

$$S(x)\supset P(x) \vdash \neg S(x) \qquad\qquad S(x)\supset P(x) \vdash P(x)$$

$$\neg S(x) \vdash \neg S(x) \quad P(x) \vdash \neg S(x) \quad \neg S(x) \vdash P(x) \quad P(x) \vdash P(x)$$

Глава IX. Иные разрешающие процедуры

1. Дизъюнктивно и конъюнктивно нормальные формы

Нормальные формулы, или точнее, конъюнктивно и дизъюнктивно нормальные формы суть еще одна разрешающая процедура, применяемая в логике высказываний для определения тождественно-истинных и тождественно-ложных формул. Способ, о котором пойдет речь ниже, является альтернативным построению таблиц истинности. Он более сложный, но необычайно важный с точки зрения наработки студентами навыков для оперирования логическими эквивалентностями.

Прежде, чем перейти к нормальным формам логики высказываний, необходимо оговориться: в логике, в следствие эквивалентных преобразований, существует много разных языков, которые не используют всего массива логических знаков. Иными словами, есть языки, которые используют лишь конъюнкцию и импликацию, игнорируя дизъюнкцию; есть языки, которые используют импликацию и дизъюнкцию, игнорируя знаки конъюнкции. Есть языки, которые не используют знак импликации и оперируют только конъюнкцией и дизъюнкцией.

Здесь, вероятно, нужны примеры.

Известные логики и математики Д. Гильберт и В. Аккерман предпочитают систему, в которой не существует знака дизъюнкции. Для них формула «$A\vee B\wedge C\supset D$» будет выглядеть так: «$AB\&C\rightarrow D$». Для большинства современных логиков та же самая формула «$A\vee B\wedge C\supset D$» может быть написана как «$A\vee BC\rightarrow D$». Нам же нужно переписать эту формулу не используя знака импликации.

Формула должна представлять собой последовательность элементарных конъюнкций, соединённых знаками дизъюнкции (нормальная дизъюнктивная форма), либо последовательность элементарных дизъюнкций, соединённых знаками конъюнкции (нормальная конъюнктивная форма).

Иными словами, нормальная дизъюнктивная форма представляет собой последовательность вида «$(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\vee(e\wedge f)$…», а нормальная конъюнктивная форма – последовательность вида «$(a\vee b)\wedge(c\vee d)\wedge(e\vee f)$…»

Когда нормальная форма формулы будет построена, можно будет легко определить – является ли она тождественно-ложной или тождественно-истинной.

Если формула принимает значение конъюнктивно нормальной формы, где все ее дизъюнкции содержат переменную и, одновременное, ее отрицание, значит формула – тождественно-истинная. Например: «$(a\vee\neg a)\wedge(b\vee\neg b)\wedge(c\vee\neg c)$…» Если же дизъюнктивно нормальная форму формулы содержит противоречие в каждой конъюнкции, то формула – тождественно-ложная. Например: «$(a\wedge\neg a)\vee(b\wedge\neg b)\vee(c\wedge\neg c)$…» Соответственно, если оба этих условия не выполняются, то формула, скорее всего, выполнима или опровержима.

Для начала необходимо объяснить алгоритм приведения формулы в нормальные формы.

1. Путем применения логических эквивалентностей мы добиваемся, чтобы формула содержала лишь знаки конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Для этого мы используем эквивалентности –

$a\supset b\leftrightarrow\neg a\vee b$ (или, что тоже самое «$a\supset b\leftrightarrow\neg(a\wedge\neg b)$») – для удаления импликации;

$a\equiv b\leftrightarrow(\neg a\vee b)\wedge(a\vee\neg b)$ (или «$a\equiv b\leftrightarrow(a\wedge b)\vee(\neg a\wedge\neg b)$») – для удаления тождества;

$a\underline{\vee}b\leftrightarrow\neg((a\vee\neg b)\wedge(\neg a\vee b))$ – для удаления строгой дизъюнкции.

2. Все отрицания, стоящие перед скобками, преобразуем в отрицания, стоящие непосредственно перед переменными. Для этого применяем законы де Моргана:

$\neg(a\vee b)\leftrightarrow\neg a\wedge\neg b$

$\neg(a\wedge b)\leftrightarrow\neg a\vee\neg b$

3. Устраняем все двойные отрицания.

4. Раскрываем скобки, используя законы дистрибутивности:

$a\wedge(b\vee c)\leftrightarrow(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ — дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции;

$a \vee (b \wedge c) \leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ — дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции;

5. По необходимости, сокращаем формулу по законам –

$a \wedge (a \vee b) \leftrightarrow a$ – первый закон поглощения;
$a \vee (a \wedge b) \leftrightarrow a$ – второй закон поглощения;
$a \wedge (b \vee \neg b) \leftrightarrow a$ – закон исключения истинного члена из конъюнкции;
$a \vee (b \wedge \neg b) \leftrightarrow a$ – закон исключения ложного члена из дизъюнкции.

Для удобства, во время всего процесса применяем законы ассоциативности и коммутативности:

$(a \wedge b) \wedge c \leftrightarrow a \wedge (b \wedge c)$ — ассоциативность конъюнкции;
$(a \vee b) \vee c \leftrightarrow a \vee (b \vee c)$ – ассоциативность дизъюнкции;
$(a \wedge b) \leftrightarrow (b \wedge a)$ – коммутативность конъюнкции;
$(a \vee b) \leftrightarrow (b \vee a)$ – коммутативность дизъюнкции.

Для того чтобы понять данный алгоритм (который требует высокой сосредоточенности и творческого мастерства студента) попробуем решить какую-нибудь простую задачу. К приме, попробуем построить нормальные формы формулы контрапозиции: $(p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)$.

1. Преобразуем импликации. Сначала главную импликацию выражения

$(p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p) \rightarrow \neg (p \supset q) \vee (\neg q \supset \neg p)$

Затем преобразовываем остальные импликации:

$\neg (p \supset q) \vee (\neg q \supset \neg p) \rightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg \neg q \vee \neg p)$

Пояснение: импликацию «$\neg (p \supset q)$» мы преобразили, по правилу отрицания импликации «$\neg (p \supset q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$», а импликацию «$(\neg q \supset \neg p)$» по эквивалентности «$a \supset b \leftrightarrow \neg a \vee b$».

2. Второе действие алгоритма мы опускаем, поскольку у нас нет отрицаний, стоящих перед скобками.

3. Устраняем двойные отрицания:

$(p\wedge\neg q)\vee(\neg\neg q\vee\neg p)\rightarrow(p\wedge\neg q)\vee(q\vee\neg p)$

4. Раскрываем скобки, используя законы дистрибутивности (для удобства меняем местами скобки по закону ассоциативности):

$(p\wedge\neg q)\vee(q\vee\neg p)\rightarrow(q\vee\neg p)\vee(p\wedge\neg q)$ - по закону ассоциативности;

$(q\vee\neg p)\vee(p\wedge\neg q)\rightarrow(q\vee\neg p\vee p)\wedge(q\vee\neg p\vee\neg q)$ – по закону дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции.

Итак, нормальная конъюнктивная форма построена – «$(q\vee\neg p\vee p)\wedge(q\vee\neg p\vee\neg q)$». Поскольку в каждой её дизъюнкции присутствует переменная и её отрицание, делаем вывод, что изначальная формула тождественно-истинная.

Попробуем построить нормальную форму тождественно-ложной формулы. Например, «$\neg(((a\supset b)\wedge a)\supset b)$»

$\neg(((a\supset b)\wedge a)\supset b)\rightarrow$	
$\rightarrow((a\supset b)\wedge a)\wedge\neg b\rightarrow$	(по правилу эквивалентности «$\neg(a\supset b)\leftrightarrow a\wedge\neg b$»)
$\rightarrow(\neg a\vee b)\wedge a\wedge\neg b\rightarrow$	(по правилу эквивалентности «$a\supset b\leftrightarrow\neg a\vee b$»)
$\rightarrow(a\wedge\neg b)\wedge(\neg a\vee b)\rightarrow$	(по правилу коммутативности конъюнкции «$(a\wedge b)\leftrightarrow(b\wedge a)$»)
$\rightarrow(a\wedge\neg b\wedge\neg a)\vee(a\wedge\neg b\wedge b)$	(по правилу дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции «$a\wedge(b\vee c)\leftrightarrow(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$»).

Нормальная дизъюнктивная форма «$(a\wedge\neg b\wedge\neg a)\vee(a\wedge\neg b\wedge b)$» соответствует всем признакам тождественно-ложной формулы, поскольку в каждом дизъюнкте присутствует противоречие.

Для закрепления навыков, попробуем решить какую-нибудь выполнимую формулу.

Предположим, дано умозаключение: «*Чтобы приготовить вкусный борщ, в него обязательно надо добавить жареный лук и* *чеснок. А это означает, что для его приготовления нужна какая-нибудь готовая заправка*».

Строим нормальную дизъюнктивную форму:

$$(a \supset (b \vee c)) \supset (a \supset d) \rightarrow$$

$\rightarrow \neg(a \supset (b \vee c)) \vee (a \supset d) \rightarrow$	(по правилу эквивалентности «$a \supset b \leftrightarrow \neg a \vee b$»)
$\rightarrow \neg(a \supset (b \vee c)) \vee (\neg a \vee d) \rightarrow$	(по правилу эквивалентности «$a \supset b \leftrightarrow \neg a \vee b$») (по правилу эквивалентности «$\neg(a \supset b) \leftrightarrow a \wedge \neg b$»)
$\rightarrow \neg(\neg a \vee (b \vee c)) \vee (\neg a \vee d) \rightarrow$	(по правилу эквивалентности «$a \supset b \leftrightarrow \neg a \vee b$»)
$\rightarrow (\neg\neg a \wedge \neg(b \vee c)) \vee (\neg a \vee d) \rightarrow$	(по закону Де Моргана (по отрицанию дизъюнкции) – «$\neg(a \vee b) \leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$»)
$\rightarrow (a \wedge \neg(b \vee c)) \vee (\neg a \vee d) \rightarrow$	по закону удаления двойного отрицания
$\rightarrow (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge d)$	(по закону Де Моргана (по отрицанию дизъюнкции) – «$\neg(a \vee b) \leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$»)

По полученной дизъюнктивной форме «$(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge d)$» видно, что анализируемое умозаключение не является тождественно-ложным.

Строим нормальную конъюнктивную форму:

$$(a \supset (b \vee c)) \supset (a \supset d) \rightarrow$$

$\rightarrow \neg(a \supset (b \vee c)) \vee (a \supset d) \rightarrow$	(по правилу эквивалентности «$a \supset b \leftrightarrow \neg a \vee b$»)
$\rightarrow \neg(a \supset (b \vee c)) \vee (\neg a \vee d) \rightarrow$	(по правилу эквивалентности «$a \supset b \leftrightarrow \neg a \vee b$») (по правилу эквивалентности «$\neg(a \supset b) \leftrightarrow a \wedge \neg b$»)
$\rightarrow \neg(\neg a \vee (b \vee c)) \vee (\neg a \vee d) \rightarrow$	(по правилу эквивалентности «$a \supset b \leftrightarrow \neg a \vee b$»)
$\rightarrow (\neg\neg a \wedge \neg(b \vee c)) \vee (\neg a \vee d) \rightarrow$	(по закону Де Моргана (по отрицанию дизъюнкции) – «$\neg(a \vee b) \leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$»)

$\rightarrow(a\wedge\neg(b\vee c))\vee(\neg a\vee d)\rightarrow$	по закону удаления двойного отрицания
$\rightarrow(a\wedge\neg b\wedge\neg c)\vee(\neg a\vee d)\rightarrow$	(по закону Де Моргана (по отрицанию дизъюнкции) – «$\neg(a\vee b)\leftrightarrow\neg a\wedge\neg b$»)
$\rightarrow(\neg a\vee d)\vee(a\wedge\neg b\wedge\neg c)\rightarrow$	(по правилу коммутативности дизъюнкции «$(a\vee b)\leftrightarrow(b\vee a)$»)
$\rightarrow(\neg a\vee d\vee a)\wedge(\neg a\vee d\vee\neg b)\wedge(\neg a\vee d\vee\neg c)$	(по правилу дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции «$a\vee(b\wedge c)\leftrightarrow(a\vee b)\wedge(a\vee c)$»)

По полученной конъюнктивной форме «$(\neg a\vee d\vee a)\wedge(\neg a\vee d\vee\neg b)\wedge(\neg a\vee d\vee\neg c)$» видно, что анализируемое умозаключение не является тождественно-истинным. Следовательно, умозаключение формы «*Чтобы приготовить вкусный борщ, в него обязательно надо добавить жареный лук и чеснок. А это означает, что для его приготовления нужна какая-нибудь готовая заправка*» может быть истинным (или ложным) при определенных условиях.

Совет

Если вам необходимо построить одновременно, как дизъюнктивно нормальную форму, так и конъюнктивно нормальную форму, начинайте своё построение, не задумываясь о том, какая именно форма у вас в результате получится. Получив одну из них, вы легко преобразуете в её другую, применив соответствующее правило дистрибутивности.

2. Аналитические таблицы

Если приведение формулы в нормальную форму является разрешающей процедурой только в логике высказываний, то очень популярный сегодня метод проверки формул путем построения *аналитических таблиц* является полуразрешающей процедурой также и для логики предикатов первого порядка.

При построении аналитических таблиц используется несколько иной язык логики (по сравнению с тем, с которым мы с вами до сих пор сталкивались). Формула «a» обозначается как ложная выражением «Fa» (от английского «false» - ложный) и, соответственно в качестве истинной она обозначается как «Ta» (от английского «truth» - истинный).

Поскольку каждая формула в аналитических таблицах позиционируется как некое множество, она берется в фигурные скобки – «{Fa}». Методом построения аналитических таблиц всего служит метод от противного, т.е. изначально предполагается, что искомая формула ложна - «{Fa}». Затем, применяя к формуле определенные правила, мы пытаемся (как в случае с семантическими таблицами) «замкнуть» таблицу. Если нам это удается – искомая формула считается тождественно-истинной.

Правила, применяемые для аналитических таблиц, делятся на две группы – правила «истинности» и правила «ложности»:

$$T\wedge \ \frac{\{T(a\wedge b)\}}{\{Ta, Tb\}} \qquad F\wedge \ \frac{\{F(a\wedge b)\}}{\{Fa\}, \{Fb\}}$$

$$T\vee \ \frac{\{T(a\vee b)\}}{\{Ta\}, \{Tb\}} \qquad F\vee \ \frac{\{F(a\vee b)\}}{\{Fa, Fb\}}$$

$$T\supset \ \frac{\{T(a\supset b)\}}{\{Fa\}, \{Tb\}} \qquad F\supset \ \frac{\{F(a\supset b)\}}{\{Ta, Fb\}}$$

$$T\neg \ \frac{\{T\neg a\}}{\{Fa\}} \qquad F\neg \ \frac{\{F\neg a\}}{\{Ta\}}$$

Также существуют правила для кванторов:

$$T\exists \ \frac{\{T\exists xA(x)\}}{\{TA(\beta)\}} \qquad F\exists \ \frac{\{F\exists xA(x)\}}{\{F\exists xA(x), FA(\beta)\}}$$

$$T\forall \ \frac{\{T\forall xA(x)\}}{\{T\forall xA(x)\}, TA(\beta)\}} \qquad F\forall \ \frac{\{F\forall xA(x)\}}{\{FA(\beta)\}}$$

Правила мы описали, теперь перейдем к практическому решению задач.

Предположим, дана формула «(a⊃b)⊃(¬a∨b)» - известная вам эквивалентность. Предполагаем, что она ложная, т.е «F»:

1. {{F((a⊃b)⊃(¬a∨b))}}

Вывод из ложной импликации мы производим, соответственно, по правило «F⊃»: {F(a⊃b)}⊨{Ta, Fb}:

2. {{T(a⊃b), F(¬a∨b)}} – из 1 по F⊃
3. {{T(a⊃b), F¬a, Fb}} – из 2 по F∨
4. {{T(a⊃b), Ta, Fb}} – из 3 по F¬
5. {{Fa, Ta, Fb}, {Tb, Ta, Fb}} – из 4 по F⊃

Пояснение действия 5: По правилу F⊃ мы должны разбить множество {T(a⊃b), Ta, Fb} надвое. Из «T(a⊃b)» по правилу F⊃ получаем {Fa} и {Tb}. Но, поскольку в действии 4 у нас остаётся множество {Ta, Fb}, мы его помещаем, и в правое, и в левое множества последовательности формул. Иными словами {Fa}+{Ta, Fb}={Fa, Ta, Fb} и {Tb}+{Ta, Fb}={Tb, Ta, Fb}. Теперь мы видим противоречия в обоих множествах. В левом {Fa} и {Ta}, а в правом – {Tb} и {Fb}. Таким образом, исходная формула тождественно-истинная.

Доказываем закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции – «a∧(b∨c)⊃(a∧b)∨(a∧c)»:

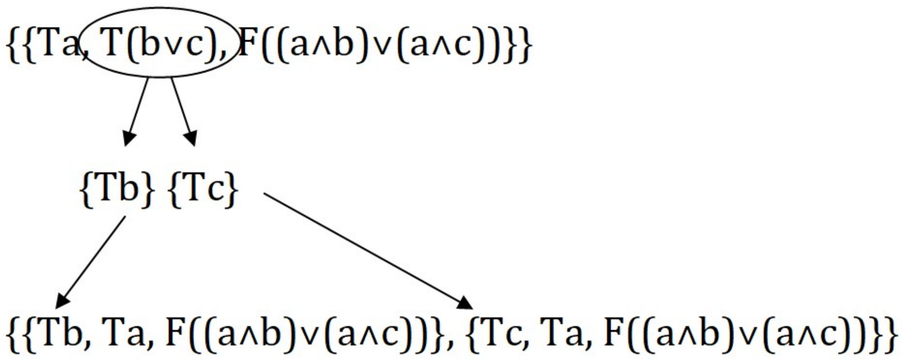
1. {{F(a∧(b∨c)⊃(a∧b)∨(a∧c))}}	
2. {{T(a∧(b∨c)), F((a∧b)∨(a∧c))}}	F⊃
3. {{Ta, T(b∨c), F((a∧b)∨(a∧c))}}	T∧
4. {{Tb, Ta, F((a∧b)∨(a∧c))}, {Tc, Ta, F((a∧b)∨(a∧c))}}	T∨
5. {{Tb, Ta, F(a∧b), F(a∧c)}, {Tc, Ta, F(a∧b), F(a∧c)}}	F∨
6. {{Tb, Ta, Fa, F(a∧c)}, {Tb, Ta, Fb, F(a∧c)}, {Tc, Ta, Fa, F(a∧c)}, {Tc, Ta, Fb, F(a∧c)}}	F∧
7. {{Tb, Ta, Fa, Fa}, {Tb, Ta, Fc, Fa}, {Tb, Ta, Fb, Fa}, {Tb, Ta, Fb, Fc}, {Tc, Ta, Fa, Fa}, {Tc, Ta, Fa, Fc}, {Tc, Ta, Fb, Fa}, {Tc, Ta, Fb, Fc}}	F∧

Аналитическая таблица замкнулась – в каждом конечном множестве мы имеем противоречие (для наглядности мы подчеркнули их).

Поясним переход от третьего действия к четвертому. Мы его совершили по правилу

$$T\vee \ \frac{\{T(a\vee b)\}}{\{Ta\},\ \{Tb\}}$$

Иными словами, нам было необходимо из одного множества перейти к двум. Соответственно, из «T(b∨c)» мы получили «Tb» и «Tc», которые необходимо распределить между двумя множествами: «Tb» слева и «Tc» справа:



Более сложной задачей является построение аналитической таблицы для формулы логики предикатов, поскольку здесь добавляются правила для кванторов. К правилам кванторов необходимо добавить некоторые пояснения.

Для T∃ и F∀, «β» - новый параметр, который не встречался в предшествующих конфигурациях.

Для F∃ и T∀, «β» - любой параметр из уже имеющихся, либо новый параметр, если параметров ещё нет.

Например, «¬∀x(S(x))⊃∃x¬(S(x))».

1. {{F¬(∀x(S(x))⊃∃x¬(S(x)))}}	
2. {{T(¬∀x(S(x))), F(∃x¬(S(x)))}}	F⊃
3. {{F(∀x(S(x))), F(∃x¬(S(x))}}	T¬
4. {{FS(β), F(∃x¬(S(x))}}	F∀

5. {{FS(β), F(∃x¬(S(x)), F¬(S(β))}}	F∃
6. {{FS(β), F(∃x¬(S(x)), TS(β)}}	F¬

Таблица замкнулась.
Еще пример: «∃x∀y(S(x, y))⊃∀y∃x(S(x, y))».

1. {{F(∃x∀y(S(x, y))⊃∀y∃x(S(x, y)))}}	
2. {{T(∃x∀y(S(x, y))), F(∀y∃x(S(x, y)))}}	F⊃
3. {{T∀y(S(β, y)), F(∀y∃x(S(x, y)))}}	T∃
4. {{T∀y(S(β, y)), F∃x(S(x, θ))}}	F∀
5. {{T∀y(S(β, y)), FS(β, θ), F∃x(S(x, γ))}}	F∃
6. {{T∀y(S(β, y)), TS(β, θ), FS(β, θ), F∃x(S(x, γ))}}	T∀

3. Аксиоматические исчисления

В рамках аксиоматической системы используются схемы аксиом (или аксиомы), причем их количество может быть сведено к минимуму:

1. a⊃(b⊃a) – схема утверждения консеквента (и аксиомы, сформулированные на её основе);
2. (a⊃(b⊃c))⊃((a⊃b)⊃(a⊃c)) – схема самодистрибутивности импликации (и аксиомы, сформулированные на её основе);
3. (¬b⊃¬a)⊃(a⊃b) – схема обратной контрапозиции.

Добавляется лишь одно правило – Modus Ponens

$$\text{M.P.}\ \frac{a\supset b,\ a}{b}$$

Для работы с языком логики предикатов первого порядка, формулируются схемы аксиом для кванторов:

1. ∀xP(x) ⊨P(t) – схема удаления ∀ (У∀)
2. P(t) ⊨∃xP(x) – схема введения ∃ (В∃)
3. ∀x(A⊃P(x))⊨(A⊃∀xP(x)) – схема введения ∀ в консеквент (В∀вК).
4. ∀x(P(x)⊃A)⊨(∃xP(x)⊃A) – схема введения ∃ в антецедент (В∃вА).

А также правило «P(t)⊨∀xP(x)» — правило обобщения (В∀)

Докажем аксиому «$\neg(a\wedge a)\rightarrow\neg a$».

Для начала, преобразуем формулу путем логических эквивалентностей – «$(a\supset\neg a)\supset\neg a$»

1. $a\supset(a\supset\neg a)\supset\neg a$ – аксиома, построенная на основе схемы утверждения консеквента.

2. $(a\supset(a\supset\neg a)\supset\neg a)\supset(((a\supset\neg a)\supset(a\supset a))\supset((a\supset\neg a)\supset\neg a)))$ - аксиома, построенная на основе схемы самодистрибутивности материальной импликации.

3. $((a\supset\neg a)\supset(a\supset a))\supset((a\supset\neg a)\supset\neg a))$ – из 1 и 2 по Modus Ponens.

4. $(a\supset\neg a)\supset(a\supset a)$ - аксиома, построенная на основе схемы утверждения консеквента.

5. $(a\supset\neg a)\supset\neg a$ – из 3 и 4 по Modus Ponens. ■

С помощью системы аксиоматического вывода можно доказать любую тождественно-истинную формулу. И (если мы говорим о логике высказываний) в выводе неизменно будет сохраняться указанные пять действий (т.е. выше представлена «схема» доказательства). К безусловным преимуществам аксиоматического вывода можно отнести минимальное количество правил и схем аксиом. К неудобствам – поиск аксиом из правил консеквента и самодистрибутивности импликации, а также крайне длинные формулы, изобилующие множеством скобок. В приведенном примере мы доказывали формулу с одной пропозициональной переменной. Если бы переменных в формуле было бы четыре или пять, вывод мог бы растянуться на несколько страниц. Такое, прямо скажем, не самое изящное доказательство является «расплатой» за минимальное количество схем вывода.

Добавив к перечисленным схемам вывода всего одну схему, схему исключения конъюнкции– «$ab\supset a$», где написание «ab» есть сокращение от «$a\wedge b$», мы сможем доказывать формулы значительно компактнее.

Доказательство формулы «$a\supset(b\supset c)\models ab\supset c$»:

1. + $a\supset(b\supset c)$ – гипотеза.

2. $(ab\supset(b\supset c))\supset((ab\supset b)\supset(ab\supset c))$ – схема самодистрибутивности импликации;

3. $(ab\supset(a\supset(b\supset c)))\supset((ab\supset a)\supset(ab\supset(b\supset c)))$ – схема на основе самодистрибутивности импликации;

4. $(a\supset(b\supset c))\supset(ab\supset(a\supset(b\supset c)))$ – схема на основе утверждения консеквента;

5. $ab\supset(a\supset(b\supset c))$ – из 4 и 1 по Modus Ponens;

6. $(ab\supset a)\supset(ab\supset(b\supset c))$ – из 5 и 3 по Modus Ponens;

7. $ab\supset a$ – схема исключения конъюнкции;

8. $ab\supset(b\supset c)$ – из 6 и 7 по Modus Ponens;

9. $(ab\supset b)\supset(ab\supset c)$ – из 2 и 8 по Modus Ponens;

10. $ab\supset b$ - схема исключения конъюнкции;

11. $ab\supset c$ – из 9 и 10 по Modus Ponens. ■

Для облегчения работы в аксиоматической системе с языком логики предикатов можно взять из системы натурального вывода все правила первого и второго рода и интерпретировать их в качестве схем аксиом; однако вместо правил для кванторов рекомендуем использовать схемы аксиом для них:

1. $\forall xP(x) \vDash P(t)$ – (У∀);
2. $P(t) \vDash \exists xP(x)$ – (В∃);
3. $\forall x(A\supset P(x))\vDash(A\supset\forall xP(x))$ – (В∀вК);
4. $\forall x(P(x)\supset A)\vDash(\exists xP(x)\supset A)$ – (В∃вА);

а также правило «$P(t)\vDash\forall xP(x)$» — (В∀).

Дано: «$\forall x(S(x)\supset P(x))\supset\exists x(S(x)\wedge P(x))$»

Решение:

1. + $\forall x(S(x)\supset P(x))$ – гипотеза;
2. + $\forall xS(x)$ – гипотеза;
3. $S(x)\supset P(x)$ – из 1 по схеме У∀;
4. $S(x)$ – из 2 по схеме У∀;
5. $P(x)$ – из 3 и 4 по схеме У⊃;
6. $S(x)\wedge P(x)$ - из 4 и 5 по схеме В∧;
7. $\exists x(S(x)\wedge P(x))$ – из 6 по схеме В∃. ■

Студент должен понимать, что аксиоматическая система может иметь в своем арсенале различные схемы аксиом. Только что решенную задачу можно было бы решить в два действия, имея в виду, что среди заявленных систем аксиом имелась бы «$\forall x(S(\beta)\supset P(\gamma))\supset\exists x(S(\beta)\wedge P(\gamma))$».

Дано: «$\forall x(S(x)\supset P(x))\supset\exists x(S(x)\wedge P(x))$»

Решение:

1. + $\forall x(S(x)\supset P(x))$ – гипотеза;
2. $\exists x(S(x)\wedge P(x))$ из 1 по схеме аксиом $\forall x(S(\beta)\supset P(\gamma))\supset\exists x(S(\beta)\wedge P(\gamma))$. ■

Попробуем решить задачу.

Дано высказывание: «Если неправда, что некоторые студенты наркоманы, следовательно, верно, что все студенты не наркоманы».

Переводим высказывание в символическую форму:

$\neg(\exists xP(x))\rightarrow\forall x\neg P(x)$

1. + $\neg\ \exists xP(x)$
2. + $P(x)$
3. $\exists xP(x)$ - из 2 по В$\exists$
4. $\neg\ \exists xP(x)\wedge\ \exists xP(x)$ из 1 и 3 по В$\wedge$
5. $(\neg\ \exists xP(x)\wedge\ \exists xP(x))\rightarrow P(x)$ из 4 и 2 по В$\rightarrow$
6. $\neg\ P(x)$ – из 5 по ДОП
7. $\forall x\neg P(x)$ – из 6 по В$\forall$вК
8. $\neg\ (\exists xP(x))\rightarrow\forall x\neg P(x)$ – из 1 и 7 по В$\rightarrow$.■

Можно эту же задачу решить, используя доказательство от противного:

1. +$\neg(\neg\ \exists xP(x)\rightarrow\forall x\neg P(x))$
2. $\neg\ \exists xP(x)\wedge\neg\forall x\neg P(x)$ из 1 по О$\rightarrow$
3. $\neg\ \exists xP(x)$ – из 2 по У$\wedge$
4. $\neg\forall x\neg P(x)$ – из 2 по У$\wedge$
5. $\neg\exists x\neg P(x)$ из 4 по В$\exists$вА
6. $\neg\ \exists xP(x)\wedge\ \neg\exists x\neg P(x)$ из 3 и 5 по В$\wedge$
7. $(\neg\ \exists xP(x)\wedge\ \neg\exists x\neg P(x))\rightarrow\ \neg(\neg\ \exists xP(x)\rightarrow\forall x\neg P(x))$ из 6 и 1 по В$\rightarrow$

8. $\neg \exists x P(x) \to \forall x \neg P(x))$ из 7 по ДОП. ■

В этом разделе мы привели несколько примеров систем аксиом, для решения некоторых логических формул. Студент должен понимать, что набор аксиом может быть абсолютно любым: главное, чтобы они помогали решить конкретную поставленную задачу. Предлагаем студентам самим поэкспериментировать в этом направлении. Главное, чтобы все аксиомы были тщательно проверенными, т.е. гарантированно являлись тождественно-истинными формулами.

Глава X. Натуральные исчисления в модальной (алетической) логике

На сегодняшний день существует множество модальных и неклассических логик. Это «базовая модальная логика», «нормальные модальные логики», «временные модальные логики», «ненормальные модальные логики», «условные логики», «интуиционистские логики», «многозначные логики», «логики с возможными мирами, провалами и избытками истины», «логики конструктивного отрицания», «логики в семантике Рутли», «релевантные логики», «нечеткие логики» и т.д.

Для первоначального знакомства с принципами модальных логик, мы будем использовать *обобщенный* вариант систем исчислений логики Кларенса Льюиса с правилом вывода Гёделя.

Для натуральных исчислений в модальной логике используются все законы и правила исчисления логики высказываний. К ним прибавляются правила кванторов и специальные правила модальной логики. В этом смысле, натуральное исчисление в модальной логике является расширением натурального исчисления логики предикатов.

Итак, напомним правила логики высказываний:

Правила вывода первого рода:

1. a, b ⊧ a∧b –введение ∧ - конъюнкции - (кратко: В∧)

Поясняем. Знак «⊧» означает *логическое следование* и читается «следовательно». Название правила «введение конъюнкции» кратко обозначается, как «В∧». Далее, по аналогии:

2. a∧b ⊧ a – удаление (исключение) конъюнкции ∧ (кратко У∧)
3. ¬(a∧b) ⊧ ¬a∨¬b — отрицание ∧ (кратко О∧)
4. a⊧ a∨b – введение ∨ (В∨)
5. a∨b, ¬a ⊧ b — удаление ∨ (У∨)
6. ¬(a∨b) ⊧¬a∧¬b — отрицание ∨ (О∨)
7. a⊃b, a) ⊧ b – удаление ⊃ (У⊃)[1]
8. a⊃b, ¬b) ⊧ ¬a– удаление ⊃ (У⊃)[2]
9. a, b ⊧ (a⊃b), (b⊃a) — введение ⊃ (В⊃)
10. ¬(a⊃b) ⊧ a∧¬b — отрицание ⊃ (О⊃)
11. a⊃b, b⊃a ⊧ a≡b — введение ≡ (В≡)

12. $a \equiv b \vDash a \supset b, b \supset a$ — удаление ≡ (У≡)
13. $a \vDash \neg\neg a$ — введение двойного отрицания (В¬¬)
14. $\neg\neg a \vDash a$ — удаление двойного отрицания (У¬¬)

Правила вывода второго рода (которые нужны в любом случае):

$((a \supset c) \wedge (b \supset c)) \vDash (a \vee b) \rightarrow c$ – рассуждение разбором случаев (РРС)

$(\neg a \supset (b \wedge \neg b)) \vDash a$ – доказательство от противного (ДОП)

$(\Gamma, a \vDash b) \vDash (\Gamma \vDash a \rightarrow b)$ — правило дедукции. Читается: если из множества гипотез Γ и посылки a логически следует b, то из множества гипотез Γ логически следует $a \supset b$.

Что касается **правил кванторов** (с помощью которых мы осуществляли исчисления предикатов), то мы можем выбрать систему натурального вывода:

1. $\forall x P(x) \supset P(t)$ – схема удаления ∀(У∀)
2. $P(t) \supset \exists x P(x)$ – схема введения ∃ (В∃)
3. $P(t) \supset \forall x P(x)$ — схема введения ∀ (В∀)
4. $\exists x P(x) \supset P(t)$ – схема удаления ∃ (У∃)

Добавляем специальные правила натурального вывода модальной логики:

$\Box A \rightarrow A$ – правило удаления необходимости (У□)

$A \rightarrow \Diamond A$ –- введение возможности (В◊)

$\neg\Box A \rightarrow \neg\Diamond A$ – отрицание необходимости (О□)

$\neg\Diamond A \rightarrow \Box\neg A$ – отрицание возможности (О◊)

$\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A \wedge \Box B$ – введение необходимости в конъюнкции (В□∧)

$\Box A \wedge \Box B \rightarrow \Box(A \wedge B)$ – удаление необходимости из конъюнкции (У□∧)

$\Diamond(A \vee B) \rightarrow \Diamond A \vee \Diamond B$ – введение возможности в дизъюнкцию (В◊∨)

$\Diamond A \vee \Diamond B \rightarrow \Diamond(A \vee B)$ – удаление возможности из дизъюнкции (У◊∨)

$\Box A \vee \Box B \rightarrow \Box(A \vee B)$ – удаление необходимости из дизъюнкции (У□∨)

$\Diamond(A \wedge B) \rightarrow \Diamond A \wedge \Diamond B$ – введение возможности в конъюнкцию (В◊∧)

$\square(A\supset B)\to\square A\supset\square B$ – введение необходимости в импликацию (В□⊃)

$\square A\to\square\square A$ – введение дополнительной необходимости (В□□)

$\square\forall xA(x)\to\forall x\square A(x)$ – перестановка необходимости от всеобщности (∀□)

$\forall x\square A(x)\to\square\forall xA(x)$ – перестановка необходимости к всеобщности (□∀)

$\Diamond\exists xA(x)\to\exists x\Diamond A(x)$ - перестановка возможности от существования (∃◊)

$\exists x\Diamond A(x)\to\Diamond\exists xA(x)$ – перестановка возможности к существованию (◊∃)

$\Diamond A\to\square\Diamond A$ – введение необходимости возможности (В□◊)

$\Diamond A, \square B\to\Diamond(A\wedge B)$ - замена необходимости на возможность (З□◊)

$(A\leftrightarrow B)\to\square(A\leftrightarrow B)$ – введение необходимой эквивалентности (В□↔)

$\square(A\leftrightarrow B)\to(A\leftrightarrow B)$ – удаление необходимой эквивалентности (У□↔)

Правило второго рода:

$A\to\square A$ – правило введения необходимости (В□) – правило Гёделя

В другом написании:

$$\text{У}\square\ \frac{\square A}{A}\qquad \text{В}\Diamond\ \frac{A}{\Diamond A}\qquad \text{О}\square\ \frac{\neg\square A}{\neg\Diamond A}\qquad \text{О}\Diamond\ \frac{\neg\Diamond A}{\square\neg A}$$

$$\text{В}\square\wedge\ \frac{\square(A\wedge B)}{\square A\wedge\square B}\qquad \text{У}\square\wedge\ \frac{\square A\wedge\square B}{\square(A\wedge B)}\qquad \text{В}\Diamond\vee\ \frac{\Diamond(A\vee B)}{\Diamond A\vee\Diamond B}\qquad \text{У}\Diamond\vee\ \frac{\Diamond A\vee\Diamond B}{\Diamond(A\vee B)}$$

$$\text{У}\square\vee\ \frac{\square A\vee\square B}{\square(A\vee B)}\qquad \text{В}\Diamond\wedge\ \frac{\Diamond(A\wedge B)}{\Diamond A\wedge\Diamond B}\qquad \text{В}\square\supset\ \frac{\square(A\supset B)}{\square A\supset\square B}\qquad \text{В}\square\square\ \frac{\square A}{\square\square A}$$

$$\forall\square\ \frac{\square\forall xA(x)}{\forall x\square A(x)}\qquad \square\forall\ \frac{\forall x\square A(x)}{\square\forall xA(x)}\qquad \exists\Diamond\ \frac{\Diamond\exists xA(x)}{\exists x\Diamond A(x)}\qquad \Diamond\exists\ \frac{\exists x\Diamond A(x)}{\exists xA(x)}$$

$$\text{В}\square\Diamond\ \frac{\Diamond A}{\square\Diamond A}\qquad \text{З}\square\Diamond\ \frac{\Diamond A,\ \square B}{\Diamond(A\wedge B)}\qquad \text{В}\square\leftrightarrow\ \frac{A\leftrightarrow B}{\square(A\leftrightarrow B)}\qquad \text{У}\square\leftrightarrow\ \frac{\square(A\leftrightarrow B)}{A\leftrightarrow B}$$

$$\text{ПГ}\ \frac{A}{\Box A}$$

Имеет смысл вспомнить *эквивалентности*:

$\Box A \Leftrightarrow \neg \Diamond \neg A$

$\Diamond A \Leftrightarrow \neg \Box \neg A$

$\nabla A \Leftrightarrow \Diamond A \wedge \Diamond \neg A$

а также *отрицания*:

$\neg \Box A \Leftrightarrow \Diamond \neg A$;

$\neg \Diamond A \Leftrightarrow \Box \neg A$;

$\neg \nabla A \Leftrightarrow \Box A \vee \Box \neg A$

Предположим, дана выводимость

$\Box \forall x(A(x) \supset B(x)) \supset \Box \forall x(\Box A(x) \supset \Diamond B(x))$.

Попробуем доказать эту формулу от противного и предположим:

$+\neg(\Box \forall x(A(x) \supset B(x)) \supset \Box \forall x(\Box A(x) \supset \Diamond B(x)))$

$\Box \forall x(A(x) \supset B(x))$ – из 1 по О$\supset$

$\forall x \Box(A(x) \supset B(x))$ – из 2 по $\forall\Box$

$\Box(A(x) \supset B(x))$ – из 3 по У$\forall$

$A(x) \supset B(x)$ – из 4 по У$\Box$

$\neg(\Box \forall x(\Box A(x) \supset \Diamond B(x)))$ - из 1 по О$\supset$

$\Box \forall x \Box A(x)$ – из 6 по О$\supset$

$\neg \Box \forall x \Diamond B(x)$ - из 6 по О$\supset$

$\neg \Diamond \forall x \Diamond B(x)$ – из 8 по О$\Box$

$\Box \neg \forall x \Diamond B(x)$ – из 9 по О$\Diamond$

$\neg \forall x \Diamond B(x)$ – из 10 по У$\Box$

$\exists x \neg \Diamond B(x)$ – из 11 по О$\forall$

$\neg \Diamond B(x)$ – из 12 по У$\exists$ - *x ограничена*

$\Box \neg B(x)$ – из 13 по О$\Diamond$

$\neg B(x)$ – из 14 по У$\Box$

$\forall x \Box A(x)$ – из 7 по У$\Box$

$\Box A(x)$ – из 16 по У$\forall$

$A(x)$ – из 17 по У$\Box$

$B(x)$ – из 5 и 18 по У$\supset$

$B(x) \wedge \neg B(x)$ – из 19 и 15 по В$\wedge$

$(B(x)\wedge\neg B(x))\supset\neg(\Box\forall x(A(x)\supset B(x))\supset\Box\forall x(\Box A(x)\supset\Diamond B(x)))$ - из 20 и 1 по В⊃ (или по правилу дедукции)

$\Box\forall x(A(x)\supset B(x))\supset\Box\forall x(\Box A(x)\supset\Diamond B(x))$ – из 21 по ДОП. ■

Решение задачи путём построения семантической таблицы:

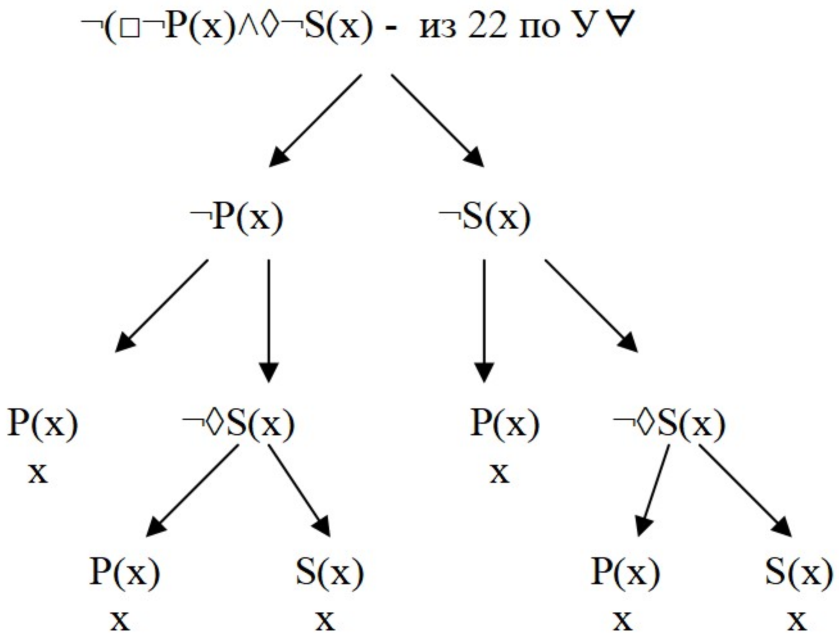
1. $\Box\forall x(A(x)\supset B(x))$ 2. $\neg\forall x(\Box A(x)\supset\Diamond B(x))$ – допущение от противного 3. $\exists x\neg(\Box A(x)\supset\Diamond B(x))$ – из 2 по О∀ 4. $\neg(\Box A(x)\supset\Diamond B(x))$ – из 3 по У∃ (***x* – ограничена**) 5. $\Box A(x)$ – из 4 по О⊃ 6. $\neg\Diamond B(x)$ – из 4 по О⊃ 7. $\Box\neg B(x)$ – из 6 по О◊ 8. **$A(x)$** – из 5 по У□ 9. **$\neg B(x)$** – из 7 по У□ 10. $\forall x(A(x)\supset B(x))$ – из 1 по У□ 11. $A(x)\supset B(x)$ – из 10 по У∀	
$\neg A(x)$	$B(x)$

В качестве еще одного примера, попробуем разобрать выводимость ⊨ $\Box\forall x\Box(P(x)\wedge S(x))\vee\Diamond\exists x(\Diamond\neg P(x)\wedge\Diamond S(x))\vee\neg\Diamond\forall x(P(x)\wedge\neg S(x))\vee\vee\Box\exists x(\Box\neg P(x)\wedge\Diamond\neg S(x))$.

1. $+\neg(\Box\forall x\Box(P(x)\wedge S(x))\vee\Diamond\exists x(\Diamond\neg P(x)\wedge\Diamond S(x))\vee\neg\Diamond\forall x(P(x)\wedge\neg S(x))\vee\Box\exists x(\Box\neg P(x)\wedge\Diamond\neg S(x)))$
2. $\neg\Box\forall x\Box(P(x)\wedge S(x))\wedge\neg\Diamond\exists x(\Diamond\neg P(x)\wedge\Diamond S(x))\wedge\Diamond\forall xP(x)\wedge\neg S(x)\wedge\neg\Box\exists x(\Box\neg P(x)\wedge\Diamond\neg S(x)))$ – из 1 по О$\vee$
3. $\neg\Box\forall x\Box(P(x)\wedge S(x))$ – из 2 по У$\wedge$
4. $\neg\Diamond\exists x(\Diamond\neg P(x)\wedge\Diamond S(x)$ – из 2 по У$\wedge$
5. $\Diamond\forall xP(x)\wedge\neg S(x)$ - из 2 по У$\wedge$
6. $\neg\Box\exists x(\Box\neg P(x)\wedge\Diamond\neg S(x)$ - из 2 по У$\wedge$
7. $\neg\Diamond\forall x\Box(P(x)\wedge S(x))$ – из 3 по О$\Box$
8. $\Box\neg\forall x\Box(P(x)\wedge S(x))$ – из 7 по О$\Diamond$
9. $\neg\forall x\Box(P(x)\wedge S(x))$ – из 8 по У$\Box$
10. $\exists x\Box\neg(P(x)\wedge S(x))$ – из 9 по О$\forall$
11. $\Box\neg(P(x)\wedge S(x))$ - из 10 по У$\exists$ (x ограничена)
12. $\neg(P(x)\wedge S(x))$ – из 11 по У$\Box$
13. $\Box\neg\exists x(\Diamond\neg P(x)\wedge\Diamond S(x))$ – из 4 по О$\Diamond$
14. $\neg\exists x(\Diamond\neg P(x)\wedge\Diamond S(x))$ – из 13 по У$\Box$
15. $\forall x\neg(\Diamond\neg P(x)\wedge\Diamond S(x))$ – из 14 по О$\exists$
16. $\neg(\Diamond\neg P(x)\wedge\Diamond S(x))$ - из 15 по У$\forall$
17. $\Diamond(P(x)\wedge\neg S(x))$ - из 5 по У$\forall$
18. $\Diamond P(x)\wedge\Diamond\neg S(x)$ – из 17 по В$\Diamond\wedge$
19. $\neg\Diamond\exists x(\Box\neg P(x)\wedge\Diamond\neg S(x)$ - из 6 по О$\Box$
20. $\Box\neg\exists x(\Box\neg P(x)\wedge\Diamond\neg S(x)$ – из 19 О$\Diamond$
21. $\neg\exists x(\Box\neg P(x)\wedge\Diamond\neg S(x)$ – из 20 по У$\Box$
22. $\forall x\neg(\Box\neg P(x)\wedge\Diamond\neg S(x)$ – из 21 по О$\exists$
23. $\neg(\Box\neg P(x)\wedge\Diamond\neg S(x)$ - из 22 по У$\forall$

<table>
<tr><td colspan="3">$\neg P(x)$</td><td colspan="3">$\neg S(x)$</td></tr>
<tr><td>$\neg\Diamond\neg P(x)$
$\Box\neg\neg P(x)$ по О$\Diamond$
$\Box P(x)$ по У$\neg\neg$
$P(x)$ по У$\Box$</td><td colspan="2">$\neg\Diamond S(x)$</td><td>$\neg\Diamond\neg P(x)$
$\Box\neg\neg P(x)$ по О$\Diamond$
$\Box P(x)$ по У$\neg\neg$
$P(x)$ по У$\Box$</td><td colspan="2">$\neg\Diamond S(x)$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\neg\Box\neg P(x)$
$\neg\Diamond\neg P(x)$ по О$\Box$
$\Box\neg\neg P(x)$ по О$\Diamond$
$\Box P(x)$ по У$\neg\neg$
$P(x)$ по У$\Box$</td><td>$\neg\Diamond\neg S(x)$
$\Box\neg\neg S(x)$ по О$\Diamond$
$\Box S(x)$ по У$\neg\neg$
$S(x)$ по У$\Box$</td><td></td><td>$\neg\Box\neg P(x)$
$\neg\Diamond\neg P(x)$ по О$\Box$
$\Box\neg\neg P(x)$ по О$\Diamond$
$\Box P(x)$ по У$\neg\neg$
$P(x)$ по У$\Box$</td><td>$\neg\Diamond\neg S(x)$
$\Box\neg\neg S(x)$ по О$\Diamond$
$\Box S(x)$ по У$\neg\neg$
$S(x)$ по У$\Box$</td></tr>
</table>

Начиная с 23 действия, мы могли бы эстетически построить таблицу по-другому:



Или, что то же самое, в классическом стиле написания в системе натурального вывода:

1. $+\neg(\Box\forall x\Box(P(x)\wedge S(x))\vee\Diamond\exists x(\Diamond\neg P(x)\wedge\Diamond S(x))\vee\neg\Diamond\forall x(P(x)\wedge\neg S(x))\vee$
$\vee\Box\exists x(\Box\neg P(x)\wedge\Diamond\neg S(x)))$
2. $\neg\Box\forall x\Box(P(x)\wedge S(x))\wedge\neg\Diamond\ \exists x(\Diamond\neg P(x)\wedge\Diamond S(x))\wedge\Diamond\forall x P(x)\wedge\neg S(x)\wedge$
$\wedge\neg\Box\exists x(\Box\neg P(x)\wedge\Diamond\neg S(x)))$ – из 1 по О$\vee$
3. $\neg\Box\forall x\Box(P(x)\wedge S(x))$ – из 2 по У$\wedge$
4. $\neg\Diamond\exists x(\Diamond\neg P(x)\wedge\Diamond S(x)$ – из 2 по У$\wedge$
5. $\Diamond\forall x P(x)\wedge\neg S(x)$ - из 2 по У$\wedge$
6. $\neg\Box\exists x(\Box\neg P(x)\wedge\Diamond\neg S(x)$ - из 2 по У$\wedge$
7. $\neg\Diamond\forall x\Box(P(x)\wedge S(x))$ – из 3 по О$\Box$
8. $\Box\neg\forall x\Box(P(x)\wedge S(x))$ – из 7 по О$\Diamond$
9. $\neg\forall x\Box(P(x)\wedge S(x))$ – из 8 по У$\Box$
10. $\exists x\Box\neg(P(x)\wedge S(x))$ – из 9 по О$\forall$
11. $\Box\neg(P(x)\wedge S(x))$ - из 10 по У$\exists$ (x ограничена)
12. $\neg(P(x)\wedge S(x))$ – из 11 по У$\Box$
13. $\Box\neg\exists x(\Diamond\neg P(x)\wedge\Diamond S(x))$ – из 4 по О$\Diamond$
14. $\neg\exists x(\Diamond\neg P(x)\wedge\Diamond S(x))$ – из 13 по У$\Box$
15. $\forall x\neg(\Diamond\neg P(x)\wedge\Diamond S(x))$ – из 14 по О$\exists$
16. $\neg(\Diamond\neg P(x)\wedge\Diamond S(x))$ - из 15 по У$\forall$
17. $\Diamond(P(x)\wedge\neg S(x))$ - из 5 по У$\forall$
18. $\Diamond P(x)\wedge\Diamond\neg S(x)$ – из 17 по В$\Diamond\wedge$
19. $\neg\Diamond\exists x(\Box\neg P(x)\wedge\Diamond\neg S(x)$ - из 6 по О$\Box$
20. $\Box\neg\exists x(\Box\neg P(x)\wedge\Diamond\neg S(x)$ – из 19 О$\Diamond$

21. ¬∃x(□¬P(x)∧◊¬S(x) – из 20 по У□
22. ∀x¬(□¬P(x)∧◊¬S(x) – из 21 по О∃
23. ¬(□¬P(x)∧◊¬S(x) - из 22 по У∀
24. ◊P(x) – из 18 по У∧
25. ◊¬S(x) – из 18 по У∧
26. ¬P(x) ∨¬S(x)) – из 12 по О∧
27. ¬◊¬P(x)∨¬◊S(x)) - из 16 по О∧
28. ¬□¬P(x)∨¬◊¬S(x) - из 23 по О∧
29. ¬□¬P(x) из 25 и 28 по У∨
30. ¬◊¬P(x) из 29 по О□
31. □¬¬P(x) из 30 по О◊
32. P(x) из 31 по У¬¬ и У□
33. S(x)) из 26 и 32 по У∨
34. ¬P(x) – из 33 и 26 по У∨
35. P(x)∧¬P(x) из 32 и 34 по В∧
36. (P(x)∧¬P(x))⊃¬(□∀x□(P(x)∧S(x))∨◊∃x(◊¬P(x)∧◊S(x))∨ ∨¬◊∀x(P(x)∧¬S(x))∨□∃x(□¬P(x)∧◊¬S(x))) из 35 и 1 по В⊃
37. □∀x□(P(x)∧S(x))∨◊∃x(◊¬P(x)∧◊S(x))∨¬◊∀x(P(x)∧¬S(x))∨ ∨□∃x(□¬P(x)∧◊¬S(x)) – из 36 по ДОП.

Мы специально прописали вывод максимально подробно, чтобы читатель обратил внимание, что многие последовательности выводов часто повторяются. Например,

- ¬□¬P(x) из 25 и 28 по У∨
- ¬◊¬P(x) из 29 по О□
- □¬¬P(x) из 30 по О◊
- P(x) из 31 по У¬¬ и У□

или

- ¬□∀x□(P(x)∧S(x))
- ¬◊∀x□(P(x)∧S(x))
- □¬∀x□(P(x)∧S(x))
- ¬∀x□(P(x)∧S(x))

Такие последовательности позволяют нам самим создавать выводы второго рода.

В первом случае, это ¬□¬A→A и ¬◊¬A→A; во втором - ¬□A→¬A и ¬◊A→¬A

Из практики исчислений можно добавить правила второго рода (схемы аксиом):

$A \to \Box A$ – правило введения необходимости (В$\Box$) – правило Гёделя

$\neg\Box A \to \Box\neg A$

$\neg\Box A \to \neg A$

$\neg\Box A \to \Diamond\neg A$

$\neg\Box\neg A \to \Diamond A$

$\Box A \to \neg\Diamond\neg A$

$\Box\neg A \to \neg\Diamond A$

$\neg\Diamond A \to \neg A$

$\neg\Diamond\neg A \to \Box A$

$\neg\Diamond\neg A \to A$

$\Diamond A \to \neg\Box\neg A$

$\Diamond\neg A \to \neg\Box A$

Попробуем решетить еще одну задачу. Правильным ли является рассуждение «*Некоторые испанцы в обед обязательно едят гаспачо. Любое гаспачо всегда готовится из томатов. Из этого следует, что некоторые испанцы, скорее всего, неравнодушны к помидорам*»?

Попробуем перевести это умозаключение на формальный язык логики.

Некоторые испанцы в обед обязательно едят гаспачо.

Слово «некоторые» говорит нам, что необходим квантор существования. А слово «обязательно» намекает на знак необходимости:

$\Box\exists x(I(x) \wedge G(x))$

В принципе, сразу используя правило удаления необходимости, мы можем записать:

$\exists x(I(x) \wedge G(x))$

Любое гаспачо всегда готовится из томатов:

$\Box\forall x(G(x) \supset T(x))$

Соответственно, снова используя правило удаления необходимости, получаем

$\forall x(G(x) \supset T(x))$

Некоторые испанцы, скорее всего, неравнодушны к помидорам:

$\Diamond\exists x(I(x) \wedge T(x))$

В итоге получаем выводимость

$$\vDash \exists x(I(x) \wedge G(x)) \wedge \forall x(G(x) \supset T(x)) \supset \Diamond\exists x(I(x) \wedge T(x))$$

Итак, дано:

$\vDash \exists x(I(x) \wedge G(x)) \wedge \forall x(G(x) \supset T(x)) \supset \Diamond \exists x(I(x) \wedge T(x))$
1. + $\exists x(I(x) \wedge G(x))$
2. + $\forall x(G(x) \supset T(x))$

В качестве гипотез мы использовали посылки для построения заданного вывода «$\Diamond \exists x(I(x) \wedge T(x))$».

3. $I(x) \wedge G(x)$ – из 1 по У$\exists$ - *x ограничен*
4. $G(x) \supset T(x)$ – из 2 по У$\forall$
5. $I(x)$ – из 3 по У$\wedge$
6. $G(x)$ – из 3 по У$\wedge$
7. $T(x)$ – из 4 и 6 по У$\supset$
8. $I(x) \wedge T(x)$ – из 5 и 7 по В$\wedge$
9. $\exists x(I(x) \wedge T(x))$ – из 8 по В$\exists$
10. $\Diamond \exists x(I(x) \wedge T(x))$ - из 9 по В$\Diamond$

Теперь мы получили искомый вывод. На этом исчисление можно закончить. Однако, для формального завершения можно дописать еще пару действий:

11. $\exists x(I(x) \wedge G(x)) \wedge \forall x(G(x) \supset T(x))$ – из 1 и 2 по В$\wedge$
12. $\exists x(I(x) \wedge G(x)) \wedge \forall x(G(x) \supset T(x)) \supset \Diamond \exists x(I(x) \wedge T(x))$ из 10 и 11 по В$\supset$ (или правилу дедукции). ■

Важно

В отличие от систем натурального вывода в классической логике (основанных на системах Куайна), в которых существует необходимое и достаточное количество правил для решения поставленных задач, в системах натурального вывода модальной логики (основанных в первую очередь на системах Льюиса) подобной однозначности нет. Этим объясняется большое количество вопросов к этим системам и продолжающийся поиск оптимальных решений.

Конечно, логика стремится к определенности, предпочитаю необходимые события вероятным. В точной науке вероятных событий принято избегать. Скажем, утверждение химика о том, что некая реакция может произойти, а может и не произойти – мало информативна.

Другое дело – гуманитарные науки и реальные жизненные обстоятельства. Здесь сама возможность некого события может иметь большое значение. Например, вывод о том, что в ближайшей перспективе возможно социальное потрясение, может в корне изменить внутреннюю политику государства. Для полицейского, задерживающего преступника, информация, что преступник возможно вооружен, может спасти ему жизнь.

Глава XI. Индуктивные и правдоподобные умозаключения

Считается, что *дедукция* – это нисхождение от общего к частному, а *индукция* – восхождения от частного к общему. Соответственно, дедуктивные умозаключения должны быть *гарантированно истинными (необходимо истинными)* , а индуктивные – лишь *правдоподобными (вероятно истинными)*. В этом плане Шерлок Холмс был не прав, говоря, что его метод - дедуктивный. Великий сыщик собирал частные факты для построения общей картины преступления. Метод Шерлока Холмса – типичный случай индуктивного метода.

Но современная логика говорит, что гарантированно истинными могут быть как дедуктивные, так и индуктивные умозаключения. Поэтому понятия «индуктивные умозаключения» и «правдоподобные умозаключения» - не синонимы.

Мы уже убедились с вами на предыдущем материале, что истинными могут быть и недедуктивные выводы. Например, некоторые непосредственные выводы в простых суждениях или некоторые выводы в силлогистике. Правдоподобными же могут быть и не явно индуктивные умозаключения, как это мы наблюдали в модальной логике.

1. Обратная дедукция.

Обратная дедукция означает, что, если из А с необходимостью следует В, то из В правдоподобно следует А.

Если дедуктивное следование мы обозначали символом «⊧ », то индуктивное следование мы будем обозначать символом «⊪».

Значит, если А⊧В, то В⊪А. Читаем: *Если из А следует В, то из В правдоподобно (возможно) следует А*: «В⊧◊А»

$$\frac{A \supset B,\ B}{\Diamond A}$$

Таким образом, неправильные модусы в системе дедуктивной логики могут быть правдоподобными в системе индуктивной логики. Скажем, Modus Ponens (неправильный):

$$\frac{A \supset B,\ B}{A}$$

в индуктивной логике является правильным с оговоркой «◊»:

$$\frac{A \supset B,\ B}{\Diamond A}$$

Если в силлогизмах вывод является необходимым, то в обратной дедукции мы получаем правдоподобные (вероятные) выводы.

Силлогизм

Все философы – люди
Люди – грешны
___
Все философы – грешны

можно перестроить в выражение обратной индукции:

Все философы – грешны
___
Правдоподобно, что все философы – люди, а люди – грешные

А непосредственное умозаключение

Все философы знают логику
___
Некоторые философы знают логику

можно представить в качестве вероятностного умозаключения

Некоторые философы знают логику
___
Вероятно, все философы знают логику

Возникает вопрос: насколько эти выводы правдоподобны? Весьма правдоподобны или мало правдоподобны? Весьма вероятны или слабо вероятны?

Вероятность события вычисляется очень легко: это соотношение желаемого события к возможному. Например, бросая монету, вы хотите понять, какова вероятность того, что у вас выпадет «решка». Желаемое событие равно 1, возможных вариантов – 2. Значит, вероятность составляет ½.

Если вы кидаете игральную кость, надеясь на результат 6, вероятность этого составит уже 1/6. Если вы случайным образом надеетесь вытащить из колоды карт в 36 листов пикового туза, вероятность этого события упадет до 1/36. Соответственно, если вы хотите вытащить из колоды любого туза, вероятность повысится в 4 раза и составит уже 4/36, т.е. 1/9.

Значительно сложнее вычислить вероятность выпадения определенных комбинаций карт. Этим подробно занимается теория вероятностей и комбинаторика.

Для проверки умозаключений, построенных по принципу обратной дедукции, в классической логике нет специальных правил. Это обусловлено тем, что классическая логика в своей основе дедуктивна и работает преимущественно с необходимо истинными и необходимо ложными конструкциями.

Тем не менее, перестраивая «обратнодедуктивные» умозаключения в дедуктивные, мы имеем возможность проверять их правдоподобность. Также, мы можем осуществлять проверку подобных умозаключений средствами модальной (алетической) логики.

Разберём означенное умозаключение

Все философы – грешны

Правдоподобно, что все философы – люди, а люди – грешные

Для начала, вспомним практику построения таблиц истинности и попробуем (игнорируя кванторы) проверить это выражения средствами логики высказываний.

В логике высказываний данное выражение, вероятно, должно быть записано так: «(a⊃c)⊨(a⊃b)∧(b⊃c)».

Строим таблицу истинности:

(a	⊃	c)	⊃	(a	⊃	b)	∧	(b	⊃	c)
И	И	И	**И**	И	И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	**И**	И	И	И	Л	И	Л	Л
И	И	И	**Л**	И	Л	Л	Л	Л	И	И
И	Л	Л	**И**	И	Л	Л	Л	Л	И	Л

Л	И	И	**И**	Л	И	И	И	И	И	И
Л	И	Л	**Л**	Л	И	И	Л	И	Л	Л
Л	И	И	**И**	Л	И	Л	И	Л	И	И
Л	И	Л	**И**	Л	И	Л	И	Л	И	Л

Из таблицы истинности мы видим, что умозаключение представляем выполнимую формулу. Значит, рассуждение правильное (или, по крайней мере, весьма правдоподобное). Тем не менее, мы опустили кванторы, и, следовательно, не учли всех необходимых деталей.

Если мы попробуем доказывать правдоподобность данного выражения путем построения натурального вывода, то нам придется доказывать формулу

$$\forall x(F(x)\supset G(x))\vDash\Diamond(\forall x(F(x)\supset L(x))\wedge\forall x(L(x)\supset G(x)))$$

Понятно, что доказать такую формулу методом от противного не получится (причем, ни в классической системе натурального вывода, ни в модальной). А для того, чтобы доказать её в таком виде с помощью допущений, нам придётся предположить существование «L(x)», что сделает доказательство формулы ничтожным. Как же быть?

Вероятнее всего, учитывая, что мы имеем дело с выражениями, построенными методом обратной дедукции, нам всё равно придётся «перестраивать» их до полноценных дедуктивных выражений. Алгоритм таков:

1. Мы меняем местами посылки и вывод;
2. Доказываем получившееся дедуктивное выражение;
3. На основании доказательства делаем вывод о правдоподобности исходного выражения, построенного методом обратной дедукции.

Соответственно, если, «перестраивая» выражение, мы получаем силлогизм, то можем проверить его по правилам силлогистики. Если получаем выражение, характерное для непосредственных выводов из простых суждений, то вспоминаем логический квадрат, законы превращения, обращения и противопоставления.

Предположим, дано умозаключение «*Некоторые философы – невменяемы, поскольку все философы люди, а среди людей встречаются сумасшедшие*».

На первый взгляд, вполне правдоподобно. Однако, давайте проверим.

Некоторые философы невменяемы

Все философы – люди

Некоторые люди - невменяемы

Перестраивая выражение в силлогизм, получаем:

Все философы$^{+}$ *- люди*$^{-}$

Некоторые люди$^{-}$ *невменяемы*$^{-}$

Некоторые философы$^{-}$ *- невменяемы*$^{-}$

Мы видим, что нарушено правило – средний термин не распределен ни в одной из посылок. Из этого делаем вывод: умозаключение «*Некоторые философы – невменяемы, поскольку все философы люди, а среди людей встречаются сумасшедшие*» - неправдоподобно.

Этот же силлогизм мы можем проверить в системе натурального вывода:

$$\forall x(F(x)\supset L(x))\wedge\exists x(L(x)\wedge N(x))\supset\exists x(F(x)\wedge N(x))$$

Попробуем решить от противного:

1. + $\neg(\forall x(F(x)\supset L(x))\wedge\exists x(L(x)\wedge N(x))\supset\exists x(F(x)\wedge N(x)))$
2. $\forall x(F(x)\supset L(x))\wedge\exists x(L(x)\wedge N(x))\wedge\neg\exists x(F(x)\wedge N(x))$ – из 1 по О$\supset$
3. $\exists x(L(x)\wedge N(x))$ – из 2 по У$\wedge$
4. $\forall x(F(x)\supset L(x))$ - из 2 по У$\wedge$
5. $\neg\exists x(F(x)\wedge N(x))$ – из 2 по У$\wedge$
6. $L(x)\wedge N(x)$ – из 3 по У$\exists$ - *x ограничен*
7. $\forall x\neg(F(x)\wedge N(x))$ – из 5 по О$\exists$
8. $\neg(F(x)\wedge N(x))$ – из 7 по У$\forall$
9. $\neg F(x)\vee\neg N(x)$ – из 8 по О$\vee$
10. $L(x)$ – из 6 по У$\wedge$

11. $N(x)$ – из 6 по У$\wedge$
12. $\neg F(x)$ – из 11 и 9 по У$\vee$
13. $F(x)\supset L(x)$ – из 4 по У$\forall$
14. ?

Задача не решается. Силлогизм не является тождественно-истинной формулой. Попробуем решить задачу путем предположения некоторых допущений:

1. + $\forall x(F(x)\supset L(x))$
2. + $\exists x(L(x)\wedge N(x))$
3. $F(x)\supset L(x)$ – из 1 по У$\forall$
4. $L(x)\wedge N(x)$ – из 2 по У$\exists$ - x ограничен
5. $L(x)$ – из 4 по У$\wedge$
6. $N(x)$ – из 4 по У$\wedge$
7. ?

Решение задачи не ладится. Конечно, мы имеем право предположить, что «*существует качество философии*»:

7. + $F(x)$
8. $F(x)\wedge N(x)$ - из 7 и 6 по В$\wedge$
9. $\exists x(F(x)\wedge N(x))$ – из 8 по В$\exists$
10. $\forall x(F(x)\supset L(x))\wedge\exists x(L(x)\wedge N(x))$ – из 1 и 2по В$\wedge$
11. $\forall x(F(x)\supset L(x))\wedge\exists x(L(x)\wedge N(x))\supset\exists x(F(x)\wedge N(x))$ – из 10 и 9 по В$\supset$

Задача решена. Это означает, что при определенных обстоятельствах и допущениях, умозаключение «*Некоторые философы – невменяемы, поскольку все философы люди, а среди людей встречаются сумасшедшие*» - может быть правдоподобным.

Как же так? Согласно правилам силлогистики данное выражение ложно, а с точки зрения натурального исчисления, при определенных обстоятельствах, это же выражение становится правдоподобным?

На самом деле здесь нет противоречия.

Во-первых, неправильные силлогизмы, как мы уже говорили ранее, могут давать истинный результат, но не гарантируют его. Во-вторых, выполнимость формулы в натуральном исчислении также говорит нам о том, что формула истинна не всегда, а при определенных обстоятельствах.

Лучше всего это можно проиллюстрировать на кругах Эйлера. Формула вида

$$\forall x(F(x)\supset L(x))\wedge\exists x(L(x)\wedge N(x))\supset\exists x(F(x)\wedge N(x))$$

или, что одно и то же, вида

$$\begin{array}{c} \mathbf{F^{+} - L^{-}} \\ \mathbf{L^{-} - N^{-}} \\ \hline \mathbf{F^{-} - N^{-}} \end{array}$$

можно отразить на кругах Эйлера двояким способом:

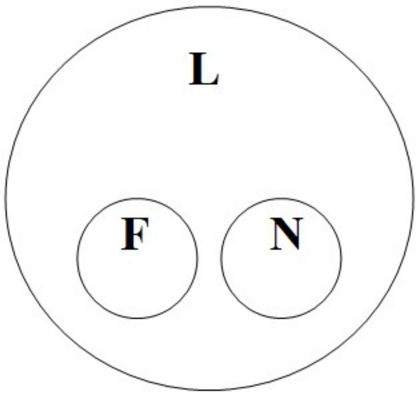


Рис. 1

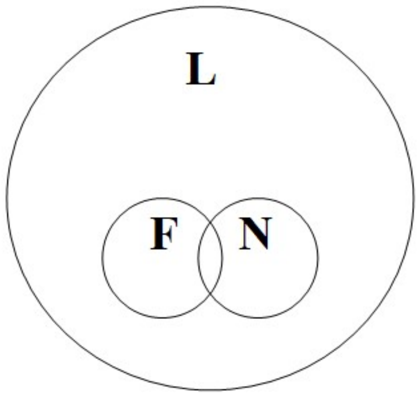


Рис. 2

На рисунках хорошо видно, что в одном случае круги F и N пересекаются, а в другом нет. При этом на обоих рисунках условие задачи отображено корректно.

Дополнительная информация

Если вероятность события B при условии истинного A более ½ - мы говорим о наличии позитивной релевантности между A и B.

Если вероятность события B при условии истинного A менее ½ - мы говорим о наличии негативной релевантности между A и B.

Если вероятность события B при условии истинного A равно ½

- мы говорим об отсутствии релевантности между А и В.

2. Обобщающая индукция

Обобщающей индукцией называется вывод о некотором классе на основании анализа его элементов.

Соответственно, обобщающую индукцию разделяют на *полную и неполную*, в зависимости от того, все элементы класса мы исследовали или нет.

Общая схема обобщающей индукции выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{c} S_1 \text{ суть } P \\ S_2 \text{ суть } P \\ S_3 \text{ суть } P \\ S_4 \text{ суть } P \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n \text{ суть } P \\ \hline \text{Все } S \text{ суть } P \end{array}$$

Если мы удостоверились, что все S_n суть Р, то вывод *Все S суть Р* является необходимо истинным и он построен методом полной обобщающей индукции.

Если мы удостоверились, что лишь некоторые S_n суть Р, то вывод *Все S суть Р* является правдоподобным (вероятным) и он построен методом неполной обобщающей индукции.

На естественный язык это можно перевести так:

Если все без исключения студенты группы «Юриспруденция» знают логику, значит, вся группа Юриспруденции знает логику. Вывод сделан на основе полной обобщающей индукции, и он истинен.

Если некоторые студенты группы «Юриспруденция» знают логику, значит, вероятно, вся группа Юриспруденции знает логику. Вывод сделан на основе неполной обобщающей индукции, и он правдоподобен.

Неполная индукция – один из самых распространенных эмпирических методов в науке, поскольку проверить все без исключения события, как правило, невозможно. Этот метод является основным при проведении социологических исследований.

Представим, что мы хотим доказать факт того, что *камень, подкинутый в воздух, обязательно полетит вниз*. Если мы будем обосновывать это событие, исходя из закона всемирного тяготения, то докажем его с абсолютной истинностью. Потому что в этом случае мы используем дедукцию и выводим из общего закона его частный случай.

Но представим, что закон всемирного тяготения нам неизвестен. Тогда нам остается доказывать, что *камень, подкинутый в воздух, обязательно полетит вниз,* экспериментально. Мы будем тысячи, миллионы, миллиарды раз подкидывать этот несчастный камень, но в итоге сможем сделать лишь правдоподобный вывод – *весьма вероятно, камень, подкинутый в воздух, полетит вниз*. Потому что в случае экспериментального доказательства мы используем неполную обобщающую индукцию.

Дополнительная информация

По большому счету, можно оспорить любой вывод как *необходимо истинный* на том основании, что все существующие законы – результат эмпирических наблюдений. Таким образом, любой закон представляет собой вывод, построенный путём неполной индукции. А, раз любой закон имеет лишь вероятностный характер, следовательно, и дедуктивные выводы из него не могут быть необходимо истинными.

3. Выводы по аналогии

Вывод по аналогии строится путем сравнения свойств двух или нескольких объектов. Если большинство свойств сравниваемых объектов совпадает, мы делаем вывод, что и остальные свойства у них одинаковы.

Общая схема выводов по аналогии выглядит так:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{\textit{А обладает признаками }} P_1\ P_2\ P_3\ P_4 \text{\textit{ и }} S \\ \text{\textit{В обладает признаками }} P_1\ P_2\ P_3\ P_4\end{array}}{\text{\textit{Вероятно, В обладает также признаком }} S}$$

Глава XII. Расширение классической логики. Неклассическая логика

Данный урок представляет собой краткий обзор некоторых неклассических логик. Задача данного урока – ознакомление студента с основными подходами неклассических логик и с методами расширения классической формальной логики.

1. Релевантные логики

Среди неклассических логик особое место занимает так называемая *релевантная логика,* которая может рассматриваться в качестве альтернативы классической логики или в качестве её расширения (усовершенствования).

Дополнительная информация

Предельно упрощая, огрубляя и обобщая позиции сторонников и противников релевантной логики, приведем их аргументы.

Сторонники релевантной логики:

Главная задача логики – решение парадокса материальной импликации, а также парадоксов, которые из неё следуют. В классической логике не существует удовлетворительной интерпретации логического следования. Логические выражения должны иметь интенсиональный, а не экстенсиональный характер (т.е. логические выражения должны исследоваться не только, исходя из их семиотики, но также и из их семантики. Иными словами, истинность логических выражений должна устанавливаться не только через отношение между знаками, но и через отношение содержания этих знаков).

Противники релевантной логики:

Парадокса материальной импликации не существует, поскольку материальная импликация не является логическим следованием. Соответственно, все «парадоксы», вытекающие из неё – парадоксы мнимые. В классической логике существует удовлетворительная формулировка логического следования, несводимая к отношению материальной импликации. Что же касается интенсионального подхода в логике, то он «убивает» формальную науку, превращая её в «спор о словах».

На сегодняшний момент единой концепции релевантной логики не существует.

Первым, кто заявил о необходимости замены материальной импликации «строгой импликацией» был американский философ Кларенс Льюис. Им была предложена система ***S***, в которой импликация понимается как «строгая». Не вдаваясь в подробности (а разновидностей этой системы было несколько, от S_1 до S_8), лишь констатируем: задачу Льюис сформулировал, но так и не решил. Исправив недостатки материальной импликации, Льюис создал парадоксы «строгой импликации».

Несколько позже формулируются еще четыре, ставшие классическими, релевантные системы. Идейным основоположником этих систем считается В. Аккерман, а практическими разработчиками - Андерсон и Белнап.

Система E_{fde} вообще предлагает отказаться от всех видов импликации, используя только их эквивалентности.

Система ***R***, формализуя импликацию, настаивает на том, чтобы в антецеденте и консеквенте были общие (пропозициональные) переменные.

Система ***E*** представляет собой модальную систему, в которой оператор необходимости выражается через релевантную импликацию «$\Box A \Leftrightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A$».

Система ***T***, интерпретирует импликацию в качестве «правомерного перехода» от одного истинного выражения к другому.

Для всех этих систем существуют свои правила вывода и схемы аксиом.

Но все эти системы не являются универсальными системами релевантной логики, а, скорее, представляют собой лишь подходы к её созданию.

Современные логики и философы не оставляют попыток создать завершенную, «работающую» релевантную логику. Вклад в этот процесс вносят как зарубежные исследователи, так и советские, российские. Была построена построения двухуровневая семантика возможных миров (Е.А. Сидоренко), логик Л.Л. Максимова построила семантику возможных миров с трёхместным отношением достижимости, обобщающую семантики Крипке для системы ***R***.

Тем не менее, вопрос о существовании релевантной логики (как и вопрос об окончательной формулировке логического следования) до сих пор остается открытым. Все перечисленные системы, либо не устраняют «парадокса материальной импликации», либо сами создают новые парадоксы, либо являются столь громоздкими и путанными, что делают реальную работу с ними весьма затруднительной.

2. Модальные логики

Модальная (алетическая) логика представляет собой раздел формальной логики, в которую включаются так называемые модальные операторы «□» - «необходимо» и «◊» - «возможно, вероятно». В некоторый модальных логиках возможно иное прочтение данный операторов, например, «доказуемо / непротиворечиво», «необходимо соблюдение норм / позволительно», «приемлема эмпирическая гипотезы / неотвергаемая», «везде, всегда / кое-где, иногда», «знаю / не знаю» и т.д.

Впервые наиболее полно и обоснованно модальные системы были сформулированы К.И. Льюисом как расширение классической логики. Он сформулировал аксиомы, правила вывода и определения своей первой системы S_1, известной нам как правила натурального вывода, но при этом добавил к ним два существенных определения: «$\lozenge A \leftrightarrow (A \wedge A)$» и «$\neg\lozenge A \leftrightarrow \neg(A \wedge A)$». Чуть позже, Льюис добавил к системе S_1 аксиому «$\lozenge(A \wedge A) \supset A$» и назвал её системой S_2. В дальнейшем Льюис понял, что для каждой конкретной модальной задачи необходимо строить индивидуальную модальную систему аксиом. Таким образом, появляется система S_3, где формулируются правила «$\neg\lozenge A \supset \neg A$» и «$(A \supset B) \supset (\neg\lozenge B \supset \neg\lozenge A)$». Исчисление S_4 прирастает аксиомой «$\neg\lozenge\neg A \supset \neg\lozenge\neg\neg\lozenge\neg A$» к системе S_1. Если к системе S_1 добавить аксиому «$\lozenge A \supset \neg\lozenge\neg\lozenge A$» - получим систему исчислений S_5. А добавив к системе S_2 аксиому «$\lozenge\lozenge A$», получаем систему исчислений S_6.

После Кларенса Льюиса развитием новых систем занимается С. Холлден. Он предлагает систему S_7, в которой к аксиомам системы S_3 прибавляется аксиома «◊◊A», и систему S_8, в которой к правилам вывода S_3 приплюсовывается аксиома «¬◊¬◊◊A».

С развитием нормальных систем модальной логики формулируется система ***K***, которую в некотором роде можно считать эталоном модального исчисления. Она формируется из классического исчисления высказываний с добавлением правила Гёделя «A→□A» и аксиомы «□(A⊃B)⊃(□A⊃□B)». Путем добавления к системе ***K*** аксиомы «□A⊃¬□¬A» получаем систему ***D***. Если же к системе ***K*** добавить аксиому «□A⊃A» - получаем систему ***T***. Добавив к системе ***T*** «□A⊃□□A» получаем исчисление S_4, а, если добавить к системе ***T*** «¬A⊃□¬□A» - систему ***B***. Система S_5 образуется путём добавления к системе ***T*** аксиомы «¬□A⊃□¬□A»… Перечислением списка модальных систем можно заниматься очень долго.

Вероятно, читатель уже понял, что аксиоматическая система в модальной логике строиться аналогично аксиоматическим системам в классической логике в том смысле, что каждая конкретная задача диктует свой собственный набор аксиом. Принципиальная разница заключается в том, что если, создавая систему аксиом в классической логике, вы не рискуете создать между ними противоречия, то, создавая систему аксиом в модальной логике, вы от этого не застрахованы.

3. Реляционные семантики возможных миров

Под *возможными мирами* в узком смысле понимается результат возможного развития событий или мыслимое положение дел. В широком смысле – возможные системы.

Задача данной логики заключается в анализе совместимости возможных миров в единой модельной системе. Модельная система играет роль заданной системы координат, в которой взаимодействуют возможные миры. Понятно, что в различных модельных системах (системах координат) возможные миры могут взаимодействовать между собой по-разному (к примеру, возможно разное развитие событий в системе Эвклида и в системе Лобачевского).

Для исчислений в реляционных семантиках возможных миров созданы системы ***K, D, T, B,*** S_4 и S_5.

4. Логика времени.

Под *логикой времени* понимается еще одна разновидность модальной логики, в которую включен фактор времени. Логика времени исходит из того, что оценка модальности высказывания зависит от времени, когда это высказывание формулируется, и от времени события, о котором идет речь в этом высказывании. Например, любое высказывание о грядущих событиях по понятным причинам может иметь лишь вероятностный характер.

Некоторые законы логики времени можно описать так: «ни одно событие не происходит раньше самого себя», «неверно, что произойдет логически невозможное событие», «всякое состояние либо сохраняет, либо возникает, либо исчезает» и т.д.

Для исчислений в логике времени создана система $\boldsymbol{K_t}$.

5. Интуиционистская логика.

Интуиционистская логика – это логика, в которой суждение считается истинным, только если его можно доказать некоторым «мысленным экспериментом».

В отличие от классической логики, интуиционистская логика старается избавиться от абстрактных моделей и объектов и приемлет лишь те объекты, для которых существует *конструктивное* доказательство.

Объект интуитивистской логики не может быть отвлеченным. Это либо построенный объект, либо объект, для которого создан алгоритм построения (или алгоритм его вычисления). Конструктивным доказательством существования объекта в этой логике может считаться простое указание (предъявление) этого объекта, либо алгоритм его построения. Истинным (конструктивным) утверждением, соответственно, считается такое утверждение, для которого существует конструктивное доказательство.

Систему исчислений для интуитивистской логии была построена Гейтингом, и получила одноименное название – «система Гейтинга».

Интуиционистская логика и её многочисленные интерпретации до сих пор является поводом для жарких дискуссий.

6. Логики второго и высших порядков.

Логика *второго и более высокого порядка* отличается от логики первого порядка квантизацией предикатов и множеств. Иными словами, если в логике первого порядка (к которой относится классическая формальная логика) кванторы используются лишь для переменных и субъектов высказываний, то в логике второго порядка допускается использование кванторов для свойств, предикатов высказываний и множеств.

В некотором смысле мы уже сталкивались с элементами логики второго порядка, когда говорили о силлогистике. Если вы помните, в силлогистике мы распределяли как субъект, так и предикат суждения. Формулой логики второго порядка может быть выражение «$\forall x \exists S(S(x))$». Читаем: *Для всех «x» существует свойство S.*

Если логика второго порядка допускает квантификацию над множествами, то логика третьего порядка допускает применение кванторов к множествам множеств. Соответственно, логика высшего порядка является объединением логики первого, второго, третьего и т.д. порядков; иначе говоря, логика высшего порядка допускает квантификацию множеств произвольной глубины вложенности.

7. Многозначные логики.

В *многозначных логиках* допускается более двух истинностных значений для высказываний. Если истину обозначить цифрой «1», а ложь цифрой «0», то многозначная логика допускает значение высказывания в диапазоне от нуля до единицы.

Трёхзначная логика была исторически первой многозначной логикой и является простейшим расширением двузначной логики. Перечень истинностных значений трёхзначной логики помимо «истинно» и «ложно» включает также третье значение, которое, как правило, трактуется как «1/2» - «возможно», «неопределенно», «неизвестно».

К многозначным логикам принято относить также трехзначную логику, логику ложности, паранепротиворечивую логику, конечнозначные логики и бесконечнозначную логику.

8. Логика расплывчатых множеств.

Основателем логики расплывчатых множеств («нечёткой» логики) является американец азербайджанского происхождения Лотфи Заде (Лютфали Рагим оглы Алескерзаде).

Нечёткая логика — набор нестрогих правил, в которых для достижения поставленной цели могут использоваться радикальные идеи, интуитивные догадки, а также опыт специалистов, накопленный в соответствующей области. Нечёткой логике свойственно отсутствие строгих стандартов. Чаще всего она применяется в экспертных системах, нейронных сетях и системах искусственного интеллекта. Вместо традиционных значений Истина и Ложь в нечеткой логике используется более широкий диапазон значений, среди которых Истина, Ложь, Возможно, Иногда, Не помню (Как бы Да, Почему бы и Нет, Ещё не решил, Не скажу…). Нечеткая логика просто незаменима в тех случаях, когда на поставленный вопрос нет чёткого ответа (да или нет; «0» или «1») или наперёд неизвестны все возможные ситуации. Например, в нечеткой логике высказывание вида «х есть большое число» интерпретируется как имеющее неточное значение, характеризуемое некоторым нечётким множеством.

9. Логика квантовой механики.

Оформление квантовой механики взамен ньютоновской потребовало специальную логику упорядочения физического мышления. Данный раздел логики представляет собой попытки описать логические связи суждений о предметах, которые изучает квантовая механика. Возникает идея особой «логики микромира», так как логика макромира не может быть применена к ней.

Почему классическая логика не применима к квантовой механики? Потому что квантовая механика исследует микромир, в котором привычные для нас законы не работают. Квантовая физика пытается описывать физические миры, альтернативные ньютоновкой физике. Возникают гипотетические ситуации, в которых объект может существовать в двух и более местах одновременно, ситуации, в которых один и тот же объект может пребывать в двух взаимоисключающих состояниях, ситуации, в которых сам объект и его свойства могут быть отделены друг от друга и т.д.

Почти целое столетие ведутся споры о необходимости и принципах логики квантовой механики, однако, ощутимых результатов в этой области до сих пор добиться не удалось.

10. Иррациональная логика.

Условно названная нами «иррациональная логика» родилась в Древней Индии параллельно с древнегреческой логикой и является самой радикальной альтернативой классической формальной логике.

Иррациональная восточная логика создана, прежде всего, для отражения законов духовной жизни человека и законов иррациональных систем. Для иллюстрации восточной логики нам необходимо ввести в символический язык новый квантор – квантор неопределенности («в некотором смысле») – обозначим его символом «⋏» (от «Vagueness»). И предикат неопределенности (S суть неопределимо, S суть невыразимо), обозначив его символом «∅». Таким образом, кроме высказываний аристотелевской логики P(x) и ¬P(x), получаем еще три возможные формулы высказываний: ⋏(P(x)∧¬(P(x)), ⋏∅(x), ⋏(P(x)∧¬P(x)∧∅(x)). При этом аристотелевские выражения также получают свою специфику под влиянием квантора относительности ⋏: ⋏P(x), ⋏¬P(x). Обращаем внимание на то, что формула ⋏(P(x)∧¬P(x)∧∅(x)), являясь иррациональной с точки зрения формальной классической логики, выражает до сих пор невыразимые в формальной логике объекты и образы. Если под x понимать вселенную (предельный универсум), то ⋏(P(x)∧¬P(x)∧∅(x)) следует прочесть так: *В некотором смысле (⋏), вселенная бесконечна (P(x)∧¬(P(x)), и ничего определенного мы о ней сказать не можем (∅(x))*. Если понимать под x образ нашего сознания, опять-таки получаем: *Образ в нашем сознании в определенном смысле (⋏) есть (⋏P(x)), но, с другой сторо-*

ны, его там невозможно обнаружить ($\curlywedge\neg P(x)$), и уж тем более он невыразим ($\emptyset(x)$).

Иррациональные системы не получили своего распространения, поскольку являются, скорее всего, бесполезными для точных наук.

Задание для самопроверки к главе 2:

Переведите на формальный язык логики следующие выражения естественного языка:

1. Мошенничество, то есть хищение чужого имущества или приобретение права на чужое имущество путем обмана или злоупотребления доверием, - наказывается штрафом в размере до ста двадцати тысяч рублей или в размере заработной платы или иного дохода осужденного за период до одного года, либо обязательными работами на срок до трехсот шестидесяти часов, либо исправительными работами на срок до одного года, либо ограничением свободы на срок до двух лет, либо принудительными работами на срок до двух лет, либо арестом на срок до четырех месяцев, либо лишением свободы на срок до двух лет.

2. Кража, то есть тайное хищение чужого имущества, - наказывается штрафом в размере до восьмидесяти тысяч рублей или в размере заработной платы или иного дохода осужденного за период до шести месяцев, либо обязательными работами на срок до трехсот шестидесяти часов, либо исправительными работами на срок до одного года, либо ограничением свободы на срок до двух лет, либо принудительными работами на срок до двух лет, либо арестом на срок до четырех месяцев, либо лишением свободы на срок до двух лет.

3. Мелкое хищение чужого имущества, совершенное лицом, подвергнутым административному наказанию за мелкое хищение, предусмотренное частью 2 статьи 7.27 Кодекса Российской Федерации об административных правонарушениях, - наказывается штрафом в размере до сорока тысяч рублей или в размере заработной платы или иного дохода осужденного за период до трех месяцев, либо обязательными работами на срок до ста восьмидесяти часов, либо исправительными работами на срок до шести месяцев, либо ограничением свободы на срок до одного года, либо принуди-

тельными работами на срок до одного года, либо арестом на срок до двух месяцев, либо лишением свободы на срок до одного года.

4. Клевета, то есть распространение заведомо ложных сведений, порочащих честь и достоинство другого лица или подрывающих его репутацию, - наказывается штрафом в размере до пятисот тысяч рублей или в размере заработной платы или иного дохода осужденного за период до шести месяцев либо обязательными работами на срок до ста шестидесяти часов.

5. Побои или иные насильственные действия, причинившие физическую боль, но не повлекшие последствий, указанных в статье 115 настоящего Кодекса, совершенные из хулиганских побуждений, а равно по мотивам политической, идеологической, расовой, национальной или религиозной ненависти или вражды либо по мотивам ненависти или вражды в отношении какой-либо социальной группы, - наказываются обязательными работами на срок до трехсот шестидесяти часов, либо исправительными работами на срок до одного года, либо ограничением свободы на срок до двух лет, либо принудительными работами на срок до двух лет, либо арестом на срок до шести месяцев, либо лишением свободы на срок до двух лет.

Задание для самопроверки к главе 2:

Переведите в символическую форму выражения естественного языка и проверьте полученные формулы путём построения таблиц истинности:

1. Если все Снегурочки состоят из жидкого азота, то Земля – круглая. Из этого следует, что, если Земля квадратная (не круглая), то Снегурочки не сделаны из жидкого азота.

2. Если чайник поставить на плиту, вода в нем закипит. Если вода в чайнике закипит, то гостям нальют чай. Если чайник поставить на плиту, то гостям нальют чай.

3. Если человек не любит кофе, то он его не любит, потому что боится высоты или потому что он не знает теорему Гёделя.

4. Если студент знает квантовую механику, то у него отменный аппетит. Однако у студента плохой аппетит, и он увлекается энергетиками. При этом, если у студента по утрам изжога, значит он знает квантовую механику.

Постройте таблицы истинности для следующих формул:

1. $((a \wedge b) \supset c) \supset ((a \wedge \neg c) \supset \neg b)$
2. $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$
3. $(a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)$
4. $(a \rightarrow b) \rightarrow ((c \rightarrow a) \rightarrow (c \rightarrow b)$
5. $\neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$
6. $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (b \rightarrow (a \rightarrow c))$
7. $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \wedge b) \rightarrow c))$
8. $(a \wedge b) \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow (b \rightarrow c))$
9. $(a \rightarrow b) \rightarrow ((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c))$
10. $(a \rightarrow b) \rightarrow ((a \vee c) \rightarrow (b \vee c))$
11. $(a \wedge b) \wedge c \leftrightarrow a \wedge (b \wedge c)$
12. $(a \vee b) \vee c \leftrightarrow a \vee (b \vee c)$
13. $(a \wedge b) \leftrightarrow (b \wedge a)$
14. $(a \vee b) \leftrightarrow (b \vee a)$
15. $a \wedge (b \vee c) \leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
16. $a \vee (b \wedge c) \leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
17. $a \wedge (a \vee b) \leftrightarrow a$
18. $a \vee (a \wedge b) \leftrightarrow a$
19. $a \wedge (b \vee \neg b) \leftrightarrow a$

Задание для самопроверки к главе 4:

Осуществите отрицание следующих суждений. Запишите их в символической форме:

1. Студент Агафонов либо глуп, либо ленив. Либо и то, и другое одновременно.

2. Студент Агафонов либо знает закон самодистрибутивности материальной импликации, либо не знает его.
3. Студент Агафонов глуп и ленив.
4. Если студент Агафонов ленив, значит он к тому же и глуп.
5. Все студенты должны знать логику.
6. Никто из студентов не должен знать логику.
7. Кое-кто из студентов должен знать логику.
8. Некоторые студенты не должны знать логику.

Осуществите превращение суждений. Запишите их в символической форме:

1. Все люди животные.
2. Некоторое люди животные.
3. Никто из людей не являются животным.
4. Кое-кто из людей – животные.

Осуществите (по возможности) обращение суждений. Запишите их в символической форме:

1. Все паранормальные явления происходят на территории России.
2. Некоторые паранормальные явления не происходят на территории России.
3. Существуют паранормальные явления, которые происходят на территории России.
4. Ни одного паранормального явления не зафиксировано на территории России.

Осуществите (по возможности) операцию противопоставления субъекту. Запишите условие и результат их в символической форме:

1. Никто из академиков не танцует в кордебалете.
2. Некоторые академики танцуют в кордебалете.
3. Кое-кто из академиков не танцует в кордебалете.
4. Все академики танцуют в кордебалете.

Осуществите (по возможности) операцию противопоставления предикату. Запишите условие и результат их в символической форме:

1. Все мои друзья закусывают сырую селёдку французскими булочками.

2. Некоторые из моих друзей закусывают сырую селёдку французскими булочками.

3. Никто из моих друзей не закусывает сырую селёдку французскими булочками.

4. Некоторые мои друзья закусывают сырую селёдку французскими булочками.

Задание для самопроверки к главе 5:

Проверьте силлогизмы Льюиса Кэрролла:

Ни один мой сын не мошенник.
К честному человеку люди всегда относятся с уважением.
Ни к одному из моих сыновей никто никогда не относится без уважения.

Все кошки знают французский язык.
Некоторые цыплята — кошки.
Некоторые цыплята знают французский язык.

Я восхищен этими картинами.
Когда я что-нибудь меня восхищает, мне хочется разглядеть это «что-нибудь» особенно внимательно.
Все эти картины я хочу разглядеть особенно внимательно

Лишь тот, кто храбр, достоин славы.
Некоторые хвастуны — трусы.
Некоторые хвастуны недостойны славы.

Все солдаты умеют маршировать.
Некоторые маленькие дети — не солдаты.
Некоторые маленькие дети не умеют маршировать.

Все эгоистичные люди неприятны окружающим.
Все обязательные люди приятны окружающим.
Все обязательные люди неэгоистичны.

Никому из тех, кто хочет ехать поездом, кто не может достать экипаж и кто не имеет времени, чтобы спокойно дойти до станции, не миновать пробежки.

Эти туристы намереваются ехать поездом, но не могут достать экипаж, зато у них достаточно времени, чтобы спокойно дойти до станции.

Этим туристам не придется бежать.

Решите сориты Льюиса Кэрролла:

1. Ни одна интересная поэма не останется не признанной людьми с тонким вкусом.
2. Ни одна современная поэма не свободна от аффектации.
3. Все ваши поэмы написаны о мыльных пузырях.
4. Ни одна аффектированная поэма не находит признания у людей с тонким вкусом.
5. Ни одна древняя поэма не написана о мыльных пузырях.

1. Все плоды на этой выставке, которые не будут удостоены награды, являются собственностью организационного комитета.
2. Ни один из представленных мной персиков не удостоен награды.
3. Ни один из плодов, распроданных после закрытия выставки, не был незрелым.
4. Ни один из спелых плодов не был выращен в теплице.
5. Все плоды, принадлежавшие организационному комитету выставки, были распроданы после ее закрытия.

1. Те, кто нарушает свои обещания, не заслуживают доверия.
2. Любители выпить очень общительны.
3. Человек, выполняющий свои обещания, честен.
4. Ни один трезвенник не ростовщик.
5. Тому, кто очень общителен, всегда можно верить.

1. Котенок, который любит рыбу, поддается дрессировке.
2. Котенок без хвоста не станет играть с гориллой.
3. Котята с усами всегда любят рыбу.

4. У котенка, поддающегося дрессировке, не бывает зеленых глаз.

5. Если у котенка нет хвоста, то у него нет и усов.

1. Все выпускники Итона в этом колледже играют в крикет.

2. Никто, кроме преподавателей, не обедает за верхним столом.

3. Ни один из тех, кто играет в крикет, не умеет грести.

4. Все мои друзья в этом колледже — выпускники Итона.

5. Все преподаватели — прекрасные гребцы.

1. Ни один из имеющихся здесь моих ящиков я не рискну открыть.

2. Мой письменный стол сделан из палисандрового дерева.

3. Все мои ящики, за исключением тех, которые находятся здесь, покрыты лаком.

4. Нет ни одного моего ящика, который я бы не рискнул открыть, если только он не полон живых скорпионов.

5. Все мои ящики из палисандрового дерева покрыты лаком.

1. Все авторы литературных произведений, постигшие природу человека, умные люди.

2. Ни одного автора нельзя считать истинным поэтом, если он не способен волновать сердца людей.

3. Шекспир написал «Гамлета».

4. Ни один автор, не постигший природу человека, не способен волновать сердца людей.

5. Только истинный поэт мог написать «Гамлета».

1. Я с отвращением отношусь ко всему, что не может служить мостом.

2. Все, что можно воспеть в стихах, для меня приятный подарок.

3. Радуга не выдержит веса тачки.

4. Все, что может служить мостом, выдержит вес тачки.

5. Я бы не принял в качестве подарка то, что вызывает у меня отвращение.

1. Если я решаю логическую задачу без ворчанья, то можно быть уверенным, что она мне понятна.

2. Посылки в этих соритах расположены не в том порядке, как в привычных мне задачах.

3. Ни одна легкая задача не вызывает у меня головной боли.

4. Я не могу понять задач, в которых посылки расположены не в том порядке, к которому я привык.

5. Я никогда не ворчу на задачу, если от нее у меня не болит голова.

1. Любая моя мысль, которую нельзя выразить в виде силлогизма, поистине смешна.

2. Моя мечта о сдобных булочках не стоит того, чтобы ее записывать на бумаге.

3. Ни одну мою несбыточную мечту нельзя выразить в виде силлогизма.

4. Мне не приходило в голову ни одной действительно смешной мысли, о которой бы я не сообщил своему поверенному.

5. Я только и мечтаю, что о сдобных булочках.

6. Я никогда не высказывал своему поверенному ни одной мысли, если она не стоила того, чтобы ее записать на бумаге.

1. Ни одна из представленных здесь картин, кроме батальных, не представляет ценности.

2. Ни одна из картин, вывешенных без рам, не покрыта лаком.

3. Все батальные картины написаны маслом.

4. Все распроданные картины представляют ценность.

5. Все картины английских мастеров покрыты лаком.

6. Все картины, которые были вывешены в рамах, проданы.

1. Животные, которые не брыкаются, всегда невозмутимы.

2. У осла нет рогов.

3. Буйвол всегда может перебросить вас через ограду.

4. Животных, которые не брыкаются, нелегко проглотить.

5. Животное, у которого нет рогов, не может перебросить вас через ограду.

6. Все животные, кроме буйвола, легко приходят в ярость.

1. Никто не забудет причесаться, если он отправляется на бал.

2. Нельзя сказать, что человек выглядит превосходно, если он неопрятен.

3. Курильщики опиума утрачивают контроль над собой.

4. Причесанный человек выглядит превосходно.

5. Никто не наденет белых лайковых перчаток, если он не отправляется на бал.

6. Человек всегда неопрятен, если он утратил контроль над собой.

1. Ни один муж, дарящий жене новые платья, не может быть несговорчивым.

2. Аккуратный муж всегда возвращается домой к чаю.

3. Жене нелегко содержать в порядке одежду мужа, если он имеет обыкновение вешать свою шляпу на газовый рожок.

4. Хороший муж всегда дарит своей жене новые платья.

5. Ни один муж не может не быть несговорчивым, если жена не следит за его одеждой.

6. Неаккуратный муж всегда вешает свою шляпу на газовый рожок.

1. Все, что не слишком безобразно, можно держать в гостиной.

2. То, что покрыто налетом соли, никогда не бывает абсолютно сухим.

3. То, что покрыто влагой, не следует держать в гостиной.

4. Купальные кабинки у моря всегда покрыты налетом соли.

5. Ничто сделанное из перламутра не может быть слишком безобразным.

6. Все, что стоит у самого моря, покрывается налетом соли.

1. Я не называю день «несчастливым», если Робинсон вежлив со мной.

2. Среды всегда бывают пасмурными днями.

3. Если люди берут с собой зонты, день никогда не бывает солнечным.

4. Единственный день недели, когда Робинсон невежлив со мной, — среда.

5. Всякий возьмет с собой зонт, если идет дождь.

6. Мои «счастливые» дни неизменно оказываются солнечными.

1. Ни одна акула не сомневается, что она прекрасно вооружена.

2. К рыбе, не умеющей танцевать менуэт, относятся без почтения.

3. Ни одна рыба не будет вполне уверена в том, что она прекрасно вооружена, если у нее нет трех рядов зубов.

4. Все рыбы, кроме акул, очень добры к детям.

5. Ни одна крупная рыба не умеет танцевать менуэт.

6. К рыбе, имеющей три ряда зубов, следует относиться с почтением.

1. Все человечество, за исключением моих лакеев, обладает известной долей здравого смысла.

2. Лишь дети могут питаться одними сладостями.

3. Лишь тот, кто играет в «классы», знает, что такое настоящее счастье.

4. Ни у одного ребенка нет ни капли здравого смысла.

5. Ни один машинист не играет в «классы».

6. Ни об одном моем лакее нельзя сказать, что он не знает, в чем заключается настоящее счастье.

1. Я люблю всех животных, которые принадлежат мне.

2. Собаки грызут кости.

3. Ни одно животное я не пускаю к себе в кабинет, если оно не «служит», когда его об этом попросят.

4. Все животные во дворе принадлежат мне.

5. Всем животным, которых я люблю, разрешается входить ко мне в кабинет.

6. Единственные животные, которые «служат», если их попросить, — собаки.

1. Животные всегда испытывают смертельную обиду, если я не обращаю на них внимания.

2. Те животные, которые принадлежат мне, находятся на той площадке.

3. Ни одно животное не сможет отгадать загадку, если оно не получило соответствующего образования в школе-интернате.

4. Ни одно животное на той площадке не барсук.

5. Если животное испытывает смертельную обиду, оно носится с бешеной скоростью и воет.

6. Я никогда не обращаю внимания на животных, которые не принадлежат мне.

7. Ни одно животное, получившее соответствующее образование в школе-интернате, не станет носиться с бешеной скоростью и выть.

1. Все письма в этой комнате, на которых проставлена дата отправления, написаны на голубой бумаге.

2. Ни одно из писем, кроме тех, которые составлены в третьем лице, не написаны черными чернилами.

3. Я не регистрирую тех писем, которые не могу прочитать.

4. Ни в одном из писем, написанных на одной страничке, не пропущена дата.

5. Все неперечеркнутые письма написаны, черными чернилами.

6. Все письма, написанные Брауном, начинаются со слов «Уважаемый сэр!»

7. Все письма, написанные на голубой бумаге, зарегистрированы мной.

8. Ни одно из писем, написанных более чем на одной странице, не перечеркнуто.

9. Ни одно из писем, начинающихся со слов «Уважаемый сэр!», не написано в третьем лице.

1. Единственные животные в этом доме — кошки.

2. Любое животное можно приручить, если оно любит глядеть на луну.

3. Если животное вызывает у меня отвращение, я стараюсь держаться от него подальше.

4. Ни одно животное не плотоядно, если оно не бродит по ночам.

5. Ни одна кошка не упустит случая поймать мышь.

6. Я не пускаю к себе в кабинет животных, кроме тех, которые находятся в этом доме.

7. Кенгуру не поддаются приручению.

8. Лишь плотоядные животные ловят мышей.

9. Животные, которых я не пускаю к себе в кабинет, вызывают у меня отвращение.

10. Животные, которые бродят по ночам, любят смотреть на луну.

Задание для самопроверки к главе 6:

Решите сориты Льюиса Кэрролла и проверьте их в системе натурального вывода:

1. Малые дети неразумны.
2. Тот, кто может укрощать крокодилов, заслуживает уважения.
3. Неразумные люди не заслуживают уважения.

1. Мои кастрюли — единственные из принадлежащих мне вещей, которые сделаны из олова.
2. Все ваши подарки чрезвычайно полезны.
3. Ни от одной из моих кастрюль нет никакой пользы.

1. Ни одна из молодых картофелин не была поджарена.
2. Все картофелины на этой тарелке съедобны.
3. Ни одна жареная картофелина не съедобна.

1. Ни одна утка не танцует вальс.
2. Ни один офицер не откажется протанцевать вальс.
3. У меня нет другой птицы, кроме уток.

1. Всякий, кто находится в здравом уме, может заниматься логикой.
2. Ни один лунатик не может быть присяжным заседателем.
3. Ни один из вашах сыновей не может заниматься логикой.

1. В этой коробке нет моих карандашей.

2. Ни один из моих леденцов — не сигара.

3. Вся моя собственность, не находящаяся в этой коробке, состоит из сигар.

1. Ни одного опытного человека нельзя считать некомпетентным.

2. Дженкинс всегда допускает грубые ошибки в работе.

3. Ни один компетентный человек не допустит грубых ошибок в работе.

1. Ни один терьер не блуждает среди знаков Зодиака.

2. То, что не блуждает среди знаков Зодиака, не может быть кометой.

3. Только у терьера хвост колечком.

1. Никто не станет выписывать газету «Таймс», если он не получил хорошего образования.

2. Ни один дикобраз не умеет читать.

3. Те, кто не умеет читать, не получили хорошего образования.

1. Все пудинги вкусны.

2. Это блюдо — пудинг.

3. Ни одно вкусное блюдо не полезно.

1. Когда мой садовник рассуждает на военные темы, его стоит послушать.

2. Никто не может помнить битву при Ватерлоо, если он не очень стар.

3. Того, кто не помнит битву при Ватерлоо, не стоит слушать, когда он рассуждает на военные темы.

1. Все колибри имеют яркое оперение.

2. Ни одна крупная птица не питается нектаром.

3. Птицы, которые не питаются нектаром, имеют неяркое оперение.

1. Все утки в этой деревне, имеющие метку «Б», принадлежат миссис Бонди.

2. Утки в этой деревне не носят кружевных воротничков, если не принадлежат миссис Бонди.

3. У миссис Бонди в этой деревне нет серых уток.

1. Вся старая посуда на этой полке имеет трещины.

2. Ни один горшок на этой полке не новый.

3. Все, что стоит на этой полке, пригодно для хранения воды.

1. Все незрелые фрукты неполезны.

2. Все эти яблоки созрели.

3. Ни один фрукт, выросший в тени, не зрелый.

1. Щенок, не желающий лежать спокойно, всегда будёт вам благодарен, если вы предложите ему скакалку.

2. Хромой щенок не скажет вам спасибо, если вы предложите ему скакалку.

3. Никто, кроме хромых щенят, не станет ткать.

1. Ни одно имя в этом списке не годится для героя романа.

2. Имена, начинающиеся с гласной, всегда мелодичны.

3. Ни одно имя не годится для героя романа, если оно начинается с согласной.

1. Все члены палаты общин находятся в полном рассудке.

2. Ни один член парламента, носящий титул пэра, не станет участвовать в скачках на мулах.

3. Все члены палаты лордов носят титул пэра.

1. Ни один из товаров, который был куплен и оплачен, не находится более в продаже в этом магазине.

2. Ни один из этих товаров нельзя вынести из магазина, если на нем нет ярлычка с надписью «Продано».

3. Ни на одном из этих товаров нет ярлычка с надписью «Продано», если он не куплен и не оплачен.

1. Ни один акробатический трюк, не объявленный в программе циркового представления, никогда не исполнялся.

2. Ни один акробатический трюк не возможен, если он включает в себя четверное сальто.

3. Ни один невозможный акробатический трюк никогда не стоит в программе циркового представления.

1. Никто из тех, кто действительно ценит Бетховена, не станет шуметь во время исполнения «Лунной сонаты».

2. Морские свинки безнадежно невежественны в музыке.

3. Те, кто безнадежно невежествен в музыке, не станут соблюдать тишину во время исполнения «Лунной сонаты».

1. Яркие цветы всегда благоухают.

2. Я не люблю цветы, выросшие не на открытом воздухе.

3. Ни один цветок, выросший на открытом воздухе, не имеет бледной окраски.

1. Ораторы, рассчитывающие на внешний эффект, слишком много думают о себе.

2. Находиться в обществе хорошо информированных людей приятно.

3. Находиться в обществе людей, которые слишком много думают о себе, неприятно.

1. Ни одного мальчика моложе 12 лет не принимают в эту школу на полный пансион.

2. У всех прилежных мальчиков рыжие волосы.

3. Ни один из мальчиков, приходящих в школу только на занятия, не учит греческий язык.

4. Никто, кроме мальчиков моложе 12 лет, не любит бить баклуши.

1. Мой доктор разрешает мне есть лишь не очень калорийные блюда.

2. То, что я могу есть, вполне подходит для ужина.

3. Свадебные пироги всегда очень калорийны.

4. Мой доктор разрешает мне есть все, что подходит для ужина.

1. Дискуссии в нашем клубе вряд ли разбудят британского льва, если брать их под контроль сразу же, как только они становятся слишком шумными.

2. Неумело направляемые дискуссии угрожают спокойствию в стенах нашего клуба.

3. Дискуссии, проходящие под председательством Томкинса, вполне могут разбудить британского льва.

4. Умело направляемые дискуссии в нашем клубе неизменно берутся под контроль, как только они становятся слишком шумными.

1. Все мои сыновья стройны.

2. Никто из моих детей не здоров, если он не делает утренней зарядки.

3. Все обжоры среди моих детей страдают ожирением.

4. Ни одна из моих дочерей не делает утренней зарядки.

1. Вещи, продаваемые на улице, не имеют особой ценности.

2. Только дрянь можно купить за грош.

3. Яйца большой гагарки представляют большую ценность.

4. Лишь то, что продается на улице, и есть настоящая дрянь.

1. Ни у одной продаваемой здесь книги, кроме тех книг, которые выставлены на витрине, нет золоченого обреза.

2. Все авторские издания снабжены красным ярлычком.

3. Все книги с красными ярлычками продаются по цене от 5 шиллингов и выше.

4. Лишь авторские издания выставляются на витрине.

1. Кровоостанавливающие средства, действие которых нельзя проверить, сплошное шарлатанство.

2. К настойке календулы не следует относиться с презрением.

3. Все лекарства, способные остановить кровотечение, когда вы порежете палец, полезны.

4. Все шарлатанские кровоостанавливающие средства достойны презрения.

1. Ни один из встреченных в море, но оставшихся незамеченным предметов — не русалка.

2. Встреченные в море предметы, о которых делается запись в вахтенном журнале, стоят того, чтобы их запомнить.

3. В моих путешествиях мне никогда не доводилось видеть ничего такого, что стоило бы запомнить.

4. О встреченных в море и замеченных предметах делается запись в вахтенном журнале.

1. Единственные книги в этой библиотеке, которые я не рекомендую читать, безнравственны по своему содержанию.

2. Все книги в твердых переплетах обладают выдающимися литературными достоинствами.

3. Все романы вполне нравственны по своему содержанию.

4. Я не рекомендую вам читать ни одну из книг в мягкой обложке.

1. Ни одна птица, кроме страуса, не достигает 9 футов роста.

2. В этом птичнике нет птиц, которые принадлежали бы комунибудь, кроме меня.

3. Ни один страус не питается пирогами с начинкой.

4. У меня нет птиц, которые бы достигали 9 футов роста.

Задание для самопроверки к главе 7:

Проверьте формулы на истинность и ложность путём построения семантических таблиц:

1. $\forall x(P(x)\supset\neg S(x))\supset\neg\exists x(P(x)\wedge S(x))\supset\neg\forall x(P(x)\supset\neg S(x))\vee\neg\exists x(P(x)\wedge S(x))$

2. $\exists x\neg(P(x)\supset\neg S(x))\vee\neg\exists x(P(x)\wedge S(x))\supset\exists x(P(x)\wedge\neg\neg S(x))\vee\neg\exists x(P(x)\wedge S(x))$

3. $\exists x(P(x)\wedge S(x))\vee\neg\exists x(P(x)\wedge S(x))\supset\exists x(P(x)\wedge S(x))\vee\forall x\neg(P(x)\wedge S(x))$

4. $\exists x(P(x)\wedge S(x))\vee\forall x(\neg P(x)\vee\neg S(x))\supset\forall x(P(x)\supset\neg S(x))\supset\neg\exists x(P(x)\wedge S(x))$

5. $\exists x(P(x)\wedge\neg\neg S(x))\vee\neg\exists x(P(x)\wedge S(x))\supset\exists x(P(x)\wedge S(x))\vee\neg\exists x(P(x)\wedge S(x))$

6. $\neg\forall x(P(x)\supset\neg S(x))\vee\neg\exists x(P(x)\wedge S(x))\supset\exists x(P(x)\wedge S(x))\vee\forall x(\neg P(x)\vee\neg S(x))$

7. $\exists x\neg(P(x)\supset\neg S(x))\vee\neg\exists x(P(x)\wedge S(x))\supset\exists x(P(x)\wedge S(x))\vee\forall x\neg(P(x)\wedge S(x))$

Задание для самопроверки к главе 8:

Проанализируйте формулы методом натурального исчисления:

1. $\Box B\supset\Box(A\supset B)$
2. $\neg\Diamond A\supset\Box(A\supset B)$
3. $\Diamond B\supset\Diamond(A\supset B)$
4. $\Diamond\Diamond A\supset\Diamond A$
5. $\Diamond\neg A\wedge B\supset\Diamond(A\supset B)$
6. $\Box A\vee\neg\Diamond A\vee(\Diamond A\wedge\Diamond\neg A)$
7. $\Diamond(\neg A\wedge B), \Diamond(\neg A\wedge\neg B)\vDash\Diamond(\neg B\supset A)$

В модальной системе натурального вывода есть правило Гёделя «$A\rightarrow\Box A$» и правило первого рода «$\Box A\rightarrow A$». Применяя правило ввода эквивалентности, мы получаем «$A\equiv\Box A$». Применяя правило ввода дополнительной необходимости, мы можем получить бесконечную последовательность «$A\equiv\Box A\equiv\Box\Box A\equiv\Box\Box\Box A\equiv\Box\Box\Box\Box A$…». Не означает ли это вырождение знака «$\Box$»? Не является ли этот знак избыточным в логике?

В модальной логике вводится главный знак – знак возможности «$\Diamond$». По-сути он означает, что событие «A» вероятно, т.е. либо оно есть, либо его нет. Чем отличается выражение «$\Diamond A$» в модальной логике от выражения «$A\vee\neg A$» в классической логике?

Задание для самопроверки к главе 9:

Проверьте умозаключения на правдоподобность:

Вероятно, Мария Ивановна питается кошачьим кормом, поскольку она обожает кошек, а кошки, как известно, едят кошачий корм.

Все, кто пишет стихи - алкоголики. Известно, что все поэты пишут стихи, а некоторые из них много пьют.

Если человек студент, значит, он готовит теракты. Потому что все экстремисты готовят теракты, а некоторые студенты – экстремисты.

Некоторые студенты готовят теракты. Потому что все экстремисты готовят теракты, а среди экстремистов встречаются студенты.

Все судьи не достойны презрения на том основании, что люди, берущие взятки, достойны презрения, а судьи взяток не берут.

Некоторые члены парламента Великобритании – убийцы. Этот вывод мы делаем на основании того, что некоторые коррупционеры – убийцы, а некоторые члены британского парламента - коррупционеры.

Некоторые члены Правительства РФ – жулики, поскольку жуликами являются все коррупционеры, а некоторые члены нашего Правительства берут огромные взятки.

Крокодилы – не белки. Потому что белки едят орехи, а крокодилы – нет.

Соляная кислота – это химическое соединение, способное отдавать катион водорода и способное принимать электронную пару с образованием ковалентной связи. Кроме того, соляная кислота может быть опасной для жизни и здоровья человека. Серная кислота также способна отдавать катион водорода и принимает электронную пару с образованием ковалентной связи. Вероятно, она также может быть опасной для жизни и здоровья человека.

У студента Цукермана карие глаза, тёмные волосы, чёрные брови, невысокий рост и он картавит. Кроме того, он отличник. Студент Мамедов также чернобров, темноволос, кареглаз, невысок ростом и картав. Следовательно, он тоже учится на одни пятёрки.

У моего друга жена – крашеная блондинка. Она любит поболтать, тратит много денег на побрякушки и не отличается большим умом. Кроме того, она изменяет своему мужу. Моя жена, скорее всего, мне тоже неверна, поскольку она тоже красит волосы в светлый цвет, невероятно болтлива, очень расточительна и глупа.

Опрос студенческой группы показал, что все студенты в ней осуждают смертную казнь. Трое студентов, отсутсвующих на момент опроса, вероятно тоже против смертной казни.

Во всех ресторанах Парижа, где мне довелось отведать французский луковый суп, его подавали с пармезаном, тимьяном и гренками из багета. Наверное, так готовят луковый суп во всём Париже.

Заключение

Помимо многочисленных расширений классической логики, существуют научные направления, возникшие на пересечении философской логики, математики и информатики. Это и теория доказательств, и семантическая теория моделей, и теория множеств, и онтология информатики и многое, многое другое. Есть и прикладные ветви формальных теорий.

Так что, если студента заинтересовала наука логики, он должен знать – двери перед ним открыты во всех направлениях.

А вот, что за этими дверями – это, надеюсь, мы уже узнаем от вас.

Приложение

Основные законы логики:

Закон тождества $\mathbf{A \equiv A}$
Закон непротиворечия: $\mathbf{\neg(A \wedge \neg A)}$
Закон исключенного третьего: $\mathbf{A \vee \neg A}$

$p \supset (q \supset p)$ – закон (утверждения) консеквента;
$(p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)$ – закон контрапозиции;
$(\neg p \supset \neg q) \supset (q \supset p)$ – закон усиленной (обратной) контрапозиции;
$((a \wedge b) \supset c) \supset ((a \wedge \neg c) \supset \neg b)$ – закон сложной контрапозиции;
$(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$ – закон самодистрибутивности (материальной) импликации.

Прочие законы логики:
$(a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)$ – первый закон транзитивности
$(a \rightarrow b) \rightarrow ((c \rightarrow a) \rightarrow (c \rightarrow b)$ – второй закон транзитивности.
$a \rightarrow (b \rightarrow a)$ – закон консеквента
$\neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$ – закон ложного имплицирования
$(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (b \rightarrow (a \rightarrow c))$ — закон перестановки антецедентов
$(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \wedge b) \rightarrow c))$ – закон импортации
$(a \wedge b) \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow (b \rightarrow c))$ – закон экспортации
$(a \wedge b) \wedge c \leftrightarrow a \wedge (b \wedge c)$ — ассоциативность конъюнкции
$(a \vee b) \vee c \leftrightarrow a \vee (b \vee c)$ – ассоциативность дизъюнкции
$(a \wedge b) \leftrightarrow (b \wedge a)$ – коммутативность конъюнкции
$(a \vee b) \leftrightarrow (b \vee a)$ – коммутативность дизъюнкции
$a \wedge (b \vee c) \leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ — дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции
$a \vee (b \wedge c) \leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ — дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции
$a \wedge (a \vee b) \leftrightarrow a$ – первый закон поглощения
$a \vee (a \wedge b) \leftrightarrow a$ – второй закон поглощения
$a \wedge (b \vee \neg b) \leftrightarrow a$ – закон исключения истинного члена из конъюнкции
$a \vee (b \wedge \neg b) \leftrightarrow a$ – закон исключения ложного члена из дизъюнкции
$(a \rightarrow b) \rightarrow ((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c))$ – закон ввода произвольной конъюнкции

$(a \to b) \to ((a \vee c) \to (b \vee c))$ – закон ввода произвольной дизъюнкции

Эквивалентности для логики высказываний:
приведение к импликации —
$(a \wedge b) \equiv \neg(a \supset \neg b)$, $\neg(b \supset \neg a)$
$(a \vee b) \equiv (\neg a \supset b)$, $(\neg b \supset a)$
$(a \leftrightarrow b) \equiv (a \supset b)$, $(b \supset a)$
$(a \underline{\vee} b) \equiv (\neg a \supset b)$, $(\neg b \supset a)$

приведение к конъюнкции —
$(a \supset b) \equiv \neg(a \wedge \neg b)$
$(a \vee b) \equiv \neg(\neg a \wedge \neg b)$
$(a \underline{\vee} b) \equiv \neg((a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b))$
$(a \leftrightarrow b) \equiv (a \vee \neg b) \wedge (b \vee \neg a)$

приведение к дизъюнкции —
$(a \wedge b) \equiv \neg(\neg a \vee \neg b)$
$(a \supset b) \equiv (\neg a \vee b)$
$(a \underline{\vee} b) \equiv (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$
$(a \leftrightarrow b) \equiv (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$

Эквивалентности логики предикатов:
$\forall x(P(x) \supset \neg S(x)) \supset \neg \exists x(P(x) \wedge S(x)) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow \neg \forall x(P(x) \supset \neg S(x)) \vee \neg \exists x(P(x) \wedge S(x)) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow \exists x \neg(P(x) \supset \neg S(x)) \vee \neg \exists x(P(x) \wedge S(x)) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow \exists x(P(x) \wedge \neg\neg S(x)) \vee \neg \exists x(P(x) \wedge S(x)) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow \exists x(P(x) \wedge S(x)) \vee \neg \exists x(P(x) \wedge S(x)) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow \exists x(P(x) \wedge S(x)) \vee \forall x \neg(P(x) \wedge S(x)) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow \exists x(P(x) \wedge S(x)) \vee \forall x(\neg P(x) \vee \neg S(x))$

$\neg \forall x(S(x) \supset P(x)) \leftrightarrow \exists x \neg(S(x) \supset P(x)) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow \exists x(S(x) \wedge \neg P(x)) \leftrightarrow \exists x(\neg S(x) \vee P(x))$

$\neg \exists x(S(x) \wedge P(x)) \leftrightarrow \forall x \neg(S(x) \wedge P(x)) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow \forall x(S(x) \supset \neg P(x)) \leftrightarrow \forall x(\neg S(x) \vee \neg P(x))$

Таблица истинности для логических знаков:

переменные		результат их сравнения				
A	B	∧	∨	⊻	⊃	↔
И	И	И	И	Л	И	И
И	Л	Л	И	И	Л	Л
Л	И	Л	И	И	И	Л
Л	Л	Л	Л	Л	И	И

Отрицание основных формул в логике высказываний:
$\neg(a \wedge b) \leftrightarrow \neg a \vee \neg b$,
$\neg(a \vee b) \leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$,
$\neg(a \veebar b) \leftrightarrow (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$,
$\neg(a \rightarrow b) \leftrightarrow a \wedge \neg b$,
$\neg(a \equiv b) \leftrightarrow (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a)$,
$\neg\neg a \leftrightarrow a$

Отрицание в логике предикатов:

суждение	↔	**его отрицание**
¬(Все S суть P)	↔	Некоторые S не суть P
¬(Все S не суть P)	↔	Некоторые S суть P
¬(Некоторые S суть P)	↔	Все S не суть P
¬(Некоторые S не P)	↔	Все S суть P

суждение	↔	**его отрицание**
Все S суть P	↔	¬(Некоторые S не суть P)
Все S не суть P	↔	¬(Некоторые S суть P)
Некоторые S суть P	↔	¬(Все S не суть P)
Некоторые S не P	↔	¬(Все S суть P)

В более подробном написании:

суждение	↔	**его отрицание**
$\forall x(S(x) \supset P(x))$	↔	$\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$
$\exists x(S(x) \wedge P(x))$	↔	$\forall x(S(x) \supset \neg P(x))$
$\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$	↔	$\forall x(S(x) \supset P(x))$
$\forall x(S(x) \supset \neg P(x))$	↔	$\exists x(S(x) \wedge P(x))$

Непосредственные выводы из простых суждений:

суждение	↔	**его превращение**
Все S суть P	↔	Ни одно S не суть не P
Все S не суть P	↔	Все S суть не P
Некоторые S суть P	↔	Некоторые S не суть не P
Некоторые S не суть P	↔	Некоторые S суть не P

суждение	↔	**его обращение**
Все S суть P	↔	Некоторые P суть S
Все S не суть P	↔	Все P не суть S
Некоторые S суть P	↔	Некоторые P суть S
Некоторые S не P	≢	не обращается!

суждение	↔	**противопоставление предикату**
Все S суть P	↔	Ни одно не P не есть S
Все S не суть P	↔	Некоторые не P суть S
Некоторые S не суть P	↔	Некоторые не P суть S

суждение	↔	**противопоставление субъекту**
Все S суть P	↔	Ни одно P не суть не S
Все S не суть P	↔	Все P суть не S
Некоторые S суть P	↔	Некоторые P не суть не S

Формализация простых суждений:

Обще-утвердительные - $\forall x(S(x)\supset P(x))$;
Частно-утвердительные - $\exists x(S(x)\wedge P(x))$;
Обще-отрицательные - $\forall x(S(x)\supset\neg P(x))$;
Частно-отрицательные - $\exists x(S(x)\wedge\neg P(x))$.

Правила силлогизмов:

1. Если одна из посылок – отрицательное суждение (¬), вывод также - отрицательное суждение (¬).
2. Если обе посылки – утвердительные суждения, вывод также утвердителен.

3. Если обе посылки – отрицательные суждения – вывод невозможен.

4. Если одна из посылок частное суждение (∃), вывод также – частное суждение (∃).

5. Если обе посылки – частные суждения (∃) – вывод невозможен.

6. Если средний термин не распределен, хотя бы в одной из посылок – вывод невозможен.

7. Термин, нераспределенный в посылках, не может быть распределён в заключении.

Система натурального вывода Куайна:

Правила вывода первого рода:

1. a,b ⊧ a∧b – введение ∧ (В∧)
2. a∧b ⊧ a – удаление ∧ (У∧)
3. ¬(a∧b) ⊧ ¬a∨¬b — отрицание ∧ (О∧)
4. a ⊧ a∨b – введение ∨ (В∨)
5. a∨b, ¬a ⊧ b — удаление ∨ (У∨)
6. ¬(a∨b) ⊧¬a∧¬b — отрицание ∨ (О∨)
7. a⊃b, a ⊧ b – удаление ⊃ (У⊃)[1]
8. a⊃b, ¬b ⊧ ¬a– удаление ⊃ (У⊃)[2]
9. a, b ⊧ (a⊃b), (b⊃a) — введение ⊃ (В⊃)
10. ¬(a⊃b) ⊧ a∧¬b — отрицание ⊃ (О⊃)
11. a⊃b, b⊃a ⊧ a≡b — введение ≡ (В≡)
12. a≡b ⊧ a⊃b, b⊃a — удаление ≡ (У≡)
13. a⊧ ¬¬a — введение двойного отрицания (В¬¬)

¬¬a⊧ a — удаление двойного отрицания (У¬¬)

Правила вывода второго рода:

1. (a⊃c)∧(b⊃c)⊧(a∨b) →c – рассуждение разбором случаев (РРС)
2. ¬a⊃(b∧¬b)⊧ a – доказательство от противного (ДОП)
3. (Г, a⊧ b)⊧(Г⊧ a⊃b) — правило дедукции.

В другом написании:

$$В\wedge\ \frac{a, b}{a\wedge b} \quad У\wedge\ \frac{a\wedge b}{a} \quad О\wedge\ \frac{\neg(a\wedge b)}{\neg a\vee\neg b} \quad В\vee\ \frac{a}{a\vee b} \quad У\vee\ \frac{a\vee b, \neg a}{b} \quad О\vee\ \frac{\neg(a\vee b)}{\neg a\wedge\neg b}$$

$$\text{У}\supset\ \frac{a\supset b,\ a}{b}\qquad \text{У}\supset\ \frac{a\supset b,\ \neg b}{\neg a}\qquad \text{В}\supset\ \frac{a,\ b}{(a\supset b),\ (b\supset a)}\ \ \text{О}\supset\ \frac{\neg(a\supset b)}{a\wedge\neg b}$$

$$\text{В}\equiv\ \frac{a\supset b,\ b\supset a}{a\equiv b}\qquad \text{У}\equiv\ \frac{a\equiv b}{a\supset b,\ b\supset a}\qquad \text{В}\neg\neg\ \frac{a}{\neg\neg a}\ \ \text{У}\neg\neg\ \frac{\neg\neg a}{a}$$

$$\text{РРС}\ \frac{(a\supset c)\wedge(b\supset c)}{(a\vee b)\to c}\qquad - \qquad \text{ДОП}\ \frac{\neg a\supset(b\wedge\neg b)}{a}$$

$$\text{ПД}\ \frac{\Gamma,\ a\vDash b}{\Gamma\vDash a\supset b}$$

Правила кванторов:
1. $\forall xP(x)\vDash P(t)$ – схема удаления ∀(У∀)
2. $P(t)\vDash\exists xP(x)$ – схема введения ∃ (В∃)
3. $P(t)\vDash\forall xP(x)$ — схема введения ∀ (В∀) – *x* ограничен
4. $\exists xP(x)\vDash P(t)$ – схема удаления ∃ (У∃) – *x* ограничен

В другом написании:

$$\text{У}\forall\ \frac{\forall xP(x)}{P(t)}\qquad \text{В}\exists\ \frac{P(t)}{\exists xP(x)}\qquad \text{В}\forall\ \frac{P(t)}{\forall xP(x)}\ \ \text{У}\exists\ \frac{\exists xP(x)}{P(t)}$$

Правила построения семантических таблиц:

— если мы имеем конъюнкцию — $a\wedge b$, то вписываем в выводе «a» и «b», не размножая таблицу;

— если мы имеем дизъюнкцию — $a\vee b$, то размножаем таблицу и в одном столбце пишем «a», а в другом – «b».

Все остальные формулы мы преобразуем в конъюнкцию или дизъюнкцию по эквивалентностям:

$(a\supset b)\to\neg a\vee b$

$\neg(a\supset b)\to a\wedge\neg b$

$\neg(a\wedge\neg b)\to\neg a\vee\neg b$

$\neg(a\vee\neg b)\to\neg a\wedge\neg b$

Правила построения аналитических таблиц:

$$T\wedge\ \frac{\{T(a\wedge b)\}}{\{Ta, Tb\}} \qquad F\wedge\ \frac{\{F(a\wedge b)\}}{\{Fa\}, \{Fb\}}$$

$$T\vee\ \frac{\{T(a\vee b)\}}{\{Ta\}, \{Tb\}} \qquad F\vee\ \frac{\{F(a\vee b)\}}{\{Fa, Fb\}}$$

$$T\supset\ \frac{\{T(a\supset b)\}}{\{Fa\}, \{Tb\}} \qquad F\supset\ \frac{\{F(a\supset b)\}}{\{Ta, Fb\}}$$

$$T\neg\ \frac{\{T\neg a\}}{\{Fa\}} \qquad F\neg\ \frac{\{F\neg a\}}{\{Ta\}}$$

$$T\exists\ \frac{\{T\exists xA(x)\}}{\{TA(\beta)\}} \qquad F\exists\ \frac{\{F\exists xA(x)\}}{\{F\exists xA(x), FA(\beta)\}}$$

$$T\forall\ \frac{\{T\forall xA(x)\}}{\{T\forall xA(x)\}, TA(\beta)\}} \qquad F\forall\ \frac{\{F\forall xA(x)\}}{\{FA(\beta)\}}$$

Правила секвенциального исчисления:

Логические правила

$$\wedge L\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\wedge B \vdash \Delta} \qquad \vee R\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A\vee B, \Delta}$$

$$\vee L\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \mid \Sigma, B \vdash \Pi}{\Gamma, \Sigma, A\vee B \vdash \Delta, \Pi} \qquad \wedge R\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \mid \Sigma \vdash B, \Pi}{\Gamma, \Sigma \vdash A\wedge B, \Delta, \Pi}$$

$$\supset L\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \mid \Sigma, B \vdash \Pi}{\Gamma, \Sigma, A\supset B \vdash \Delta, \Pi} \qquad \supset R\ \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\supset B, \Delta}$$

$$\neg L\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \qquad \neg R\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}$$

$$\forall L\ \frac{\Gamma, A[x/t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall t A \vdash \Delta} \qquad \forall R\ \frac{\Gamma \vdash A[x/y], \Delta}{\Gamma \vdash \forall y A, \Delta}$$

$$\exists L\ \frac{\Gamma, A[x/y] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists y A \vdash \Delta} \qquad \exists R\ \frac{\Gamma \vdash A[x/t], \Delta}{\Gamma \vdash \exists t A, \Delta}$$

Структурные правила:

$$WL\ \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad WR\ \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$$

$$CL\ \frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad CR\ \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$$

$$PL\ \frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta} \qquad PR\ \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}$$

$$\text{I (аксиома)}\ \frac{}{A \vdash A} \qquad \text{CUT (сечение)}\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \mid A, \Sigma \vdash \Pi}{\Gamma, \Sigma \vdash \Delta, \Pi}$$

Правила вывода в модальной логике:
Правила первого рода:

1. $\Box A \to A$ – правило удаления необходимости (У$\Box$)
2. $A \to \Diamond A$ –- введение возможности (В$\Diamond$)
3. $\neg\Box A \to \neg\Diamond A$ – отрицание необходимости (О$\Box$)
4. $\neg\Diamond A \to \Box\neg A$ – отрицание возможности (О$\Diamond$)
5. $\Box(A \wedge B) \to \Box A \wedge \Box B$ – введение необходимости в конъюнкции (В$\Box\wedge$)
6. $\Box A \wedge \Box B \to \Box(A \wedge B)$ – удаление необходимости из конъюнкции (У$\Box\wedge$)
7. $\Diamond(A \vee B) \to \Diamond A \vee \Diamond B$ – введение возможности в дизъюнкцию (В$\Diamond\vee$)
8. $\Diamond A \vee \Diamond B \to \Diamond(A \vee B)$ – удаление возможности из дизъюнкции (У$\Diamond\vee$)
9. $\Box A \vee \Box B \to \Box(A \vee B)$ – удаление необходимости из дизъюнкции (У$\Box\vee$)
10. $\Diamond(A \wedge B) \to \Diamond A \wedge \Diamond B$ – введение возможности в конъюнкцию (В$\Diamond\wedge$)

11. $\Box(A\supset B)\to\Box A\supset\Box B$ – введение необходимости в импликацию (В$\Box\supset$)

12. $\Box A\to\Box\Box A$ – введение дополнительной необходимости (В$\Box\Box$)

13. $\Box\forall xA(x)\to\forall x\Box A(x)$ – перестановка необходимости от всеобщности ($\forall\Box$)

14. $\forall x\Box A(x)\to\Box\forall xA(x)$ – перестановка необходимости к всеобщности ($\Box\forall$)

15. $\Diamond\exists xA(x)\to \exists x\Diamond A(x)$ - перестановка возможности от существования ($\exists\Diamond$)

16. $\exists x\Diamond A(x)\to\Diamond \exists xA(x)$ – перестановка возможности к существованию ($\Diamond\exists$)

17. $\Diamond A\to\Box\Diamond A$ – введение необходимости возможности (В$\Box\Diamond$)

18. $\Diamond A,\ \Box B\to\Diamond(A\wedge B)$ - замена необходимости на возможность (З$\Box\Diamond$)

19. $(A\leftrightarrow B)\to\Box(A\leftrightarrow B)$ – введение необходимой эквивалентности (В$\Box\leftrightarrow$)

20. $\Box(A\leftrightarrow B)\to(A\leftrightarrow B)$ – удаление необходимой эквивалентности (У$\Box\leftrightarrow$)

Правило второго рода:

$A\to\Box A$ – правило введения необходимости (В$\Box$) – правило Гёделя

В другом написании:

$$\text{У}\Box\ \frac{\Box A}{A}\qquad \text{В}\Diamond\ \frac{A}{\Diamond A}\qquad \text{О}\Box\ \frac{\neg\Box A}{\neg\Diamond A}\qquad \text{О}\Diamond\ \frac{\neg\Diamond A}{\Box\neg A}$$

$$\text{В}\Box\wedge\ \frac{\Box(A\wedge B)}{\Box A\wedge\Box B}\qquad \text{У}\Box\wedge\ \frac{\Box A\wedge\Box B}{\Box(A\wedge B)}\qquad \text{В}\Diamond\vee\ \frac{\Diamond(A\vee B)}{\Diamond A\vee\Diamond B}\qquad \text{У}\Diamond\vee\ \frac{\Diamond A\vee\Diamond B}{\Diamond(A\vee B)}$$

$$\text{У}\Box\vee\ \frac{\Box A\vee\Box B}{\Box(A\vee B)}\qquad \text{В}\Diamond\wedge\ \frac{\Diamond(A\wedge B)}{\Diamond A\wedge\Diamond B}\qquad \text{В}\Box\supset\ \frac{\Box(A\supset B)}{\Box A\supset\Box B}\qquad \text{В}\Box\Box\ \frac{\Box A}{\Box\Box A}$$

$$\forall\Box\ \frac{\Box\forall xA(x)}{\forall x\Box A(x)}\qquad \Box\forall\ \frac{\forall x\Box A(x)}{\Box\forall xA(x)}\qquad \exists\Diamond\ \frac{\Diamond\exists xA(x)}{\exists x\Diamond A(x)}\qquad \Diamond\exists\ \frac{\exists x\Diamond A(x)}{\exists xA(x)}$$

$$\text{В}\Box\Diamond\ \frac{\Diamond A}{\Box\Diamond A}\qquad \text{З}\Box\Diamond\ \frac{\Diamond A,\ \Box B}{\Diamond(A\wedge B)}\qquad \text{В}\Box\leftrightarrow\ \frac{A\leftrightarrow B}{\Box(A\leftrightarrow B)}\qquad \text{У}\Box\leftrightarrow\ \frac{\Box(A\leftrightarrow B)}{A\leftrightarrow B}$$

$$\text{ПГ}\ \frac{A}{\Box A}$$

Эквивалентности модальной логики:

$\Box A \Leftrightarrow \neg \Diamond \neg A$

$\Diamond A \Leftrightarrow \neg \Box \neg A$

$\nabla A \Leftrightarrow \Diamond A \wedge \Diamond \neg A$

Отрицания в модальной логике:

$\neg \Box A \Leftrightarrow \Diamond \neg A$;

$\neg \Diamond A \Leftrightarrow \Box \neg A$;

$\neg \nabla A \Leftrightarrow \Box A \vee \Box \neg A$

9 785002 045747

Кортунов Вадим Вадимович

12 уроков формальной логики
Учебно-методическое пособие

Коломенская типография
Московская обл., г. Коломна, ул. 3-го Интернационала, 2 А

Издательство «Перо»
109052, Москва, Нижегородская ул., д. 29-33, стр. 15, ком. 536
Тел.: (495) 973-72-28, 665-34-36
Подписано в печать 01.10.2022. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 11,2. Тираж 520 экз. Заказ 796.